大學用書

李代數與表現理論之導引

J. E. Humphrey 著

張　瑞　吉譯

國立編譯館主編
黎明文化事業公司出版

大學用書

李代數與表現理論之導引

J. E. Humphrey 著

張 瑞 吉譯

國立編譯館主編

黎明文化事業公司出版

版權所有
翻印必究

310(69-64)

李代數與表現理論之導引

著作者：J. E. Humphrey
翻譯者：張瑞吉
出版者：黎明文化事業股份有限公司
地　址：臺北市信義路二段二一三號十一樓
行政院新聞局出版事業登記臺業字第一八五號
總發行所：
臺北市長安東路一段五十六號
門市部：
臺北市信義路二段二一三號綜合書城
臺北市長安東路一段五十六號
臺北市重慶南路一段四十九號
臺北市林森南路一〇七號文化大樓
高雄五福四路九十五號
郵政劃撥帳戶一八〇六一號
印刷者：永裕印刷廠
地　址：臺北市西昌街一六八號
中華民國七十年八月初版

定　價：新臺幣一八〇元

◀如有缺頁、倒裝請寄回換書▶

序　　言

本書的主要內容是介紹讀者有關特徵數爲 0 的代數封閉體上的半單李代數的經典理論，特別是表現理論。閱讀本書所需的預備知識爲線性代數（包括固有值，雙線性形式，歐氏空間以及向量空間的張量積）和一些抽象代數的方法。一般說來，一個聰明而且用功的大學部學生要瞭解前四章的內容是不很難的，不過若想唸懂後三章則須有較好的程度。

除了在物理以及數學的許多部門上的用途之外，半單李代數本身就具有吸引力因爲它有某種程度和完整的基本結果。自從十年前 Jacobson 的經典之作出版以來，此理論已改良許多，即使是古典部分也有很多改進的地方。我儘力地將他們編在此書裏並使這些內容較易爲非專家們所接受。對於專家來說，以下幾點是要特別注意的:

(1) 在討論半單李代數的情形下，爲了要以環面子代數取代較古典的 Cartan 子代數我特別強調線性變換的 Jordan-Chevalley 分解。

(2) Cartan 子代數的共軛定理的證明是採用基礎的李代數方法（根據 D. J. Winter 和 G. D. Mostow 的證明）而避免用代數幾何。

(3) 同構定理先是用基礎的方法證明（定理 14.2），其後又可由 Serre 定理（18.3）推論而得。Serre 定理提供一個用生成元及關係來呈現李代數的想法。

(4) 從一開始，在課文及習題裏就強調 A, B, C, D 型單代數。

(5) 根系（第三章）以及一些權論是以公理化的方法處理的。

(6) 在 23 節和 24 節裏我介紹 Weyl 的特徵標公式。整個過程是基於 Harish-Chandra 的特徵標理論而與 Freudenthal 的重複數公式 (22.3) 是不相關的。這是取自 D. N. Verma 博士論文以及 I. N. Bernstein, I. M. Gel'fand, S. L. Gel'fand 的最近成果。

(7) 在第七章我根據 R. Steinberg 的講義介紹 Chevalley 羣論的基本造法。

我省略一些標準的題材（其中大部分我認爲是屬於更深的課程）例如，雙對同調，Levi 和 Mal'cev定理，Ado 和 Iwasawa 定理，非代數封閉體上的分類，質特徵數的李代數，這些題材可在參考文獻的一些書及文章裏，特別是 Jacobson〔1〕,〔2〕, Winter〔1〕, Seligman〔1〕找得到。我希望讀者能繼續探討這些題材。

J. E. Humphrey

記　號

Z, **Z**$^+$, **Q**, **R**, **C** 分別代表整數，非負整數，有理數，實數，以及複數。

$\amalg$　表示向量空間的直和

$A \ltimes B$　表示羣 A 與羣 B 的半直積，其中以 B 爲正規子羣

Card＝Cardinality

char＝characteristic

det＝行列式值

dim＝維數

Ker＝核

Im＝像

Tr＝跡

目　　錄

第一章　基本概念

在這一章裡 $\mathbf{F}$ 表代表任意（可交換）體。

1.　定義與範例

1.1.　李代數的觀念

李代數是在線性變換的向量空間中賦上一個新的運算：
$[x, y]=xy-yx$（其中右端的運算是通常的運算）之後的自然產物，新運算在一般的情形下，既沒有可交換性也沒有結合性。我們可以抽象地用幾個公理描述這個系統。

定義： 設 L 爲體 $\mathbf{F}$ 上的向量空間，而 $L\times L\rightarrow L$ 爲 L 中的一個運算，記爲 $(x, y)\rightarrow[xy]$ 並稱爲 x 與 y 的**括弧**或**換位元素**。再設這個括弧運算滿足下列公理：

(*L*1) 括弧運算爲雙線性。

(*L*2) $[xx]=0$ 對所有 $x\in L$。

(*L*3) $[x[yz]]+[y[zx]]+[z[xy]]=0\ (x, y, z\in L)$

則稱 L 爲 $\mathbf{F}$ 上的**李代數**。

公理（*L*3）稱爲 **Jacobi 恆等式**。注意，將（*L*1）和（*L*2）應用到 $[x+y, x+y]$ 上面去會得到反交換性：(*L*2′) $[xy]=-[yx]$（反之，若 char $\mathbf{F}\neq 2$，則顯然可由（*L*2′）導出（*L*2）。）

如果 $\mathbf{F}$ 上的兩個李代數 L, L' 之間存在一向量空間同構 $\phi: L\to L$ 具有如下的性質：對所有的 $x, y\in L$ 滿足

$$\phi([xy])=[\phi(x)\phi(y)]$$

則稱 L 和 L' 是同構（ϕ 稱爲李代數 L 與 L' 之間的一個**同構**）。同理，我們也可以很容易地介紹（**李**）**子代數**這個觀念：設 K 是 L 的一個子空間。如果對任意 $x, y\in K$，總有 $[xy]\in K$，則稱 K 是 L 的一個子代數；當然，K 在括弧運算下自成一個李代數。注意，任意非零元素 $x\in L$ 定義一個一維子代數 $\mathbf{F}_x$，其運算依（$L2$）是自明的。

在此書中我們幾乎只考慮有限維的向量空間的李代數。除非另有例外的敍述我們總是做這樣的假設。然而我們急須指出在研究表現理論時（五至七章）某些 $\mathbf{F}$ 上的無限維向量及結合代數扮演一個極重要的角色。在看一些具體的例子之前我們也提醒讀者一下，即使只假定 L 爲交換環上的一個模，李代數的公理還是有意義的，不過在此我們將不討論這觀點。

1.2. 線性李代數

設 V 爲 $\mathbf{F}$ 上的有限維向量空間，以 $End\,V$ 表示 V 上的一切線性變換 $V\to V$ 所組成的集合。$End\,V$ 可看成是 $\mathbf{F}$ 上的一個 n^2 維向量空間（$n=dimV$），同時 $End\,V$ 對於通常的乘法（映射的合成）形成一個環。定義一個新運算 $[xy]=xy-yx$，稱爲 x 和 y 的括弧。在此運算下 $End\,V$ 成爲 $\mathbf{F}$ 上的李代數：公理（$L1$）及（$L2$）立刻可檢驗出，然而（$L3$）需要一個簡單的計算（希望讀者自證之）。爲了要區分這個新的代數結構和老的結合結構，我們記具有新結構的李代數 $End(V)$ 爲 $gl(V)$ 並且稱爲**一般線性李代數**（因其與**一般線性羣** $GL(V)$ 有很密切的關係，$GL(V)$ 爲 V 上一切可逆自同構形成的集合）。當 V 爲無限維時我們還是採用記號 $gl(V)$ 而不另作說明。

李代數 $gl(V)$ 的任意子代數都稱爲**線性李代數**。若讀者認爲矩陣比線性變換更適意的話則可固定V的一組基底，藉以認同$gl(V)$和 $\mathbf{F}$ 上的一切 $n\times n$ 矩陣所成的集合記爲 $gl(n,\mathbf{F})$。這樣的做法是無害的，而且對於明確的計算是很方便的。爲參考之故，我們寫下 $gl(n,\mathbf{F})$ 的標準基底矩陣e_{ij}, $1\leq i$, $j\leq l$，（在 (i,j) 位置爲1其他爲0）的乘法表。因爲 $e_{ij}e_{kl}=\delta_{jk}e_{il}$，所以

(*)　　　　$[e_{ij},e_{kl}]=\delta_{jk}e_{il}-\delta_{kj}$

注意上式的係數爲±1或0？特別的是這些係數都落在 $\mathbf{F}$ 的質體內。

我們現在就舉幾個例子看看，這些例子將是此書中整個理論的中心。他們分成四大簇 $A_l,B_l,C_l,D_l(l\leq1)$ 而統稱爲**古典代數**（因爲他們與古典線性李羣相對應）。

A_l: 設 $dimV=l+1$。以 $sl(V)$ 或 $sl(l+1,\mathbf{F})$ 表示從V映至V的所有跡爲0的線性變換組成的集合。記住，一矩陣的跡是指它的對角線上所有成分的和；它與V的基底的選取無關，因此上面的說法是沒有問題的。）因爲 $Tr(xy)=Tr(yx)$及 $Tr(x+y)=Tr(x)+Tr(y)$ 所以 $sl(V)$爲$gl(V)$ 的子代數，稱爲**特殊線性代數**因爲它與**特殊線性羣** $SL(V)$，即從V映至V的一切行列式爲1的線性變換組成的羣；有所關連。那麼 $sl(V)$的維數爲何呢？一方面 $sl(V)$爲$gl(V)$的眞子代數因此其維數最多是 $(l+1)^2-1$。他方面，我們能寫出 $(l+1)^2-1$ 個跡爲0而且是線性獨立的矩陣：取一切的 $e_{ij}(\neq j)$ 以及一切的 $h_i=e_{i1}-e_{i+1,i+1}(1\leq i\leq l)$，總數正好是 $l+(l+1)^2-(l+1)$。我們將把這一組基底看成是 $sl(l+1,\mathbf{F})$ 的標準基底。

C_l: 設 $dimV=2l$，其基底爲 $(v_1,\cdots\cdots,v_{2l})$。藉矩陣

$$s=\begin{pmatrix}0 & I_l\\ -I_l & 0\end{pmatrix}$$

在V上定義一個非退化斜對稱形式f。（若V有一非退化雙線性形式

f 滿足 $f(v,w)=-f(w,v)$ 則不難證明 V 的維數是偶數。）以 $sp(V)$ 或 $sp(2l,\mathbf{F})$ 表示所有線性映射 $x:V\to V$ 而且滿足條件

$$f(x(v),w)=-f(v,x(w)),v,w,\in V$$

組成的集合，而且稱其爲**耦對代數**。讀者易證 $sp(V)$ 在括弧運算下是封閉的。若以矩陣表示，則

$$x=\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}(m,n,p,q\in gl(l,\mathbf{F}))\text{ 爲耦對的條件}$$

是 $sx=-x^ts$（$x^t=x$ 的轉置），即 $n^t=n$，$p^t=p$ 而 $m^t=-q$（最後的條件使 $Tr(x)=0$。）現在可很容易地算出 $sp(2l,\mathbf{F})$ 的一組基底。取對角矩陣 $e_{ii}-e_{l+i,l+i}(1\le i\le l)$，共有 l 個。加上 $e_{ij}-e_{l+j,l+i}(1\le i\neq j\le l)$，共有 l^2-l 個。對於 n 我們取矩陣 $e_{i,l+i}(1\le i\le l)$ 以及 $e_{i,l+j}+e_{j,l+i}(1\le i<j\le l)$，共有 $l+\frac{1}{2}l(l-1)$個，同理，p 也可如法炮製。全部加起來我們就得 $dim s_p(2l,\mathbf{F})=2l^2+l$

B_l: 設 $dimV=2l+1$ 爲奇數，取 f 爲 V 上的非迭化對稱雙線性形式其矩陣表示爲

$$s=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_l \\ 0 & I_l & 0 \end{pmatrix}$$

正交代數 $o(V)$ 或 $o(2l+1,\mathbf{F})$ 是由所有的線性映射 $x:V\to V$ 且滿足條件

$$f(x(v),w)=-f(v,x(w)),\ v,\ w\in V$$

（與 C_e 的條件相同）者組成。若我們將 x 作與 s 相同的分割

$$x=\begin{pmatrix} a & b_1 & b_2 \\ c_1 & m & n \\ c_2 & p & q \end{pmatrix}$$

則條件 $sx=-x^ts$ 與以下的條件組等價:

$$a=0,c_1=-b_2{}^t,c_2=-b_1{}^t,\ q=-m^t,n^t=-n,p^t$$
$$=-p。$$

（正如 C_l 的情形，這證明了 $Tr(x)=0$）至於基底，可先取 l 個對角矩陣 $e_{ii}-e_{l+i,l+i}(2\leq i\leq l+1)$，加上 $2l$ 個只牽涉到第一列與第一行的矩陣：$e_{1,l+i+1}-e_{i+1,1}$，和 $e_{1,i+1}-e_{l+i+1,1}(1\leq i\leq l)$。對 n 取 $e_{i+1,l+j+1}-e_{j+1,l+i+1}(1\leq i<j\leq l)$，而且對 p 取 $e_{i+l+1,j+1}-e_{j+l+1,i+1}$ $(1\leq j<i\leq l)$。基底元素的總個數爲 $2l^2+l$（注意：這也是 C_l 的維數）。

D_l：我們將在此造另一個**正交代數**。除了 $dimV=2l$ 是偶數而且 s 有較簡單的形式外

$$\begin{pmatrix}0 & I_l\\ I_l & 0\end{pmatrix}$$

整個造法完全和 B_l 一樣。我們讓讀者自己去造基底並且證明 dim $\mathrm{o}(2l,\mathbf{F})=2l^2$（習題 8）。

在這一小節裏我們再提出 $gl(n,\mathbf{F})$ 的另外幾個子代數做爲結束。這幾個子代數將爲我們扮演着很重要的配角。令 $t(n,\mathbf{F})$ 爲由一切**上三角矩陣** $(a_{ij}),a_{ij}=0$ 如果 $i>j$ 所組成的集合。令 $n(n,\mathbf{F})$ 爲**嚴格上三角矩陣**（$a_{ij}=0$ 如果 $i\geq j$）。最後令 $d(n,\mathbf{F})$ 爲由所有的對角矩陣組成的集合。顯然可驗證出這當中的任何一個在括弧運算下是封閉的。同時也該注意到

$$t(n,\mathbf{F})=d(n,\mathbf{F})+n(n,\mathbf{F})$$

（向量空間的直和），以及

$$[d(n,\mathbf{F}),n(n,\mathbf{F})]=n(n,\mathbf{F}),$$

因此

$$[t(n,\mathbf{F}),t(n,\mathbf{F})]=n(n,\mathbf{F}),$$

參考習題 5。（若H, K爲L的子代數，$[H, K]$ 表示L中一切的換位元素 $[xy]$, $x\in H$及$y\in K$，生成的子空間。）

1.3. 導子李代數

一些由線性變換組成的李代數可以很自然地看成是代數的導子組成的。爲此，我先定義F 代數。所謂的 **F 代數**（不必有結合性）是指 F 上的一個向量空間$\mathscr{A}$具有一雙線性運算

$$\mathscr{A}\times\mathscr{A}\longrightarrow\mathscr{A}$$

$$(a, b)\longrightarrow ab$$

（如果$\mathscr{A}$是李代數，我們就用括弧來表示運算）。其次定義導子。所謂$\mathscr{A}$的**導子**是指一線性變換

$$\delta:\mathscr{A}\longrightarrow\mathscr{A}$$

滿足條件

$$\delta(ab)=a\delta(b)+\delta(a)b。$$

易於驗證$\mathscr{A}$的所有導子組成的集合 $Der\mathscr{A}$ 爲 $End\mathscr{A}$ 的子空間。讀者也應證明兩個導子的的換位元素 $[\delta, \delta']$ 還是導子（然而通常的乘積則不一定是，參考習題11）。所以 $Der\mathscr{A}$ 爲 $gl(\mathscr{A})$ 的子代數。

因爲在上面所敍述的定義下，李代數就是一個 F 代數，所以 $Der\,L$ 是有定義的。某些導子的產生是很自然的。譬如說，令$x\in L$則

$$y\longrightarrow[xy]$$

爲L的一個自同態，我們記之爲 $ad\,x$。實際上，$ad\,x\in DerL$，這是因爲我們能够將 Jacobi 恒等式（利用（L2′））重新寫成：

$$[x[yz]]=[[xy]z]+[y[xz]]。$$

這種形式的導子稱爲**內導子**，其他的都稱爲**外導子**。當然很可能 $ad\,x=0$ 而 $x\neq 0$：例如在任何一個一維李代數裏就發生了這種情形。映

射

$$L \longrightarrow Der\,L$$
$$x \longrightarrow ad\,x$$

是稱爲L的**正則表現**；它在以下扮演一個具有決定性的角色。

有時我們把 x 既看成 L 的元素也同時看成是L的子代數K的元素。爲避免混淆不淸之故，記號 $ad_L x$ 或$ad_K x$將用來表示x是作用在L 或 K 上。譬如，設x爲對角矩陣，則 $ad_{d(n,F)}(x)=0$，然而 $ad_{(n,F)}(x)$ 不必爲 0 。

1.4.　抽象李代數

我們已看到線性李代數的一些自然例子。實際上，衆所週知，每一個（有限維）李代數都與某一線性李代數同構（Ado, Iwasawa 的定理）。我們將不在此證明此一事實（參考 Jacobson 〔1〕第四章或 Bourbaki 〔1〕）；然而在理論的前期中，這結果在任何有趣的場合裏顯然是眞。

有時我們也希望抽象地考慮李代數。譬如，假定L爲$\mathbf{F}$ 上的有限維向量空間，對所有的$x, y \in L$，我們可定義

$$[x, y]=0,$$

則L成爲一個李代數。這樣的李代數有自明的李乘法是稱爲 Abel 或可換李代數（因爲在線性的情形下$[x, y]=0$正好指明x與y交換）。設L爲任意的李代數而 $x_1, \cdots\cdots, x_n$ 爲L的基底，顯然L的整個乘法表可由式子

$$[x_i, x_j]=\sum_{k=1}^{n} a_{ij}{}^k x_k$$

中的**結構常數** $a_{ij}{}^k$ 所決定。利用（$L2$),($L2'$）可得知那些$a_{ij}{}^k$, $i\geq j$，甚至能夠從其他的導出。有了這個註解，如想只藉一組特定的結構常數而盲目地定義一個李代數是可能的。自然並不是任何一組純量

$\{a_{ij}{}^k\}$ 都可以做得到，但只要稍微想一下就知道只須再加上兩個條件就可以了，

$$a_{ii}{}^k = 0\,;$$

$$\sum_k (a_{ij}{}^k a_{kl}{}^m + a_{jl}{}^k a_{ki}{}^m + a_{li}{}^k a_{kj}{}^m) = 0\,,$$

此兩條件是由（$L2$）和（$L3$）導出的。在實用上，我們將沒有機會用這種人爲的方法來造李代數。不過如果把它當做抽象觀點的一個應用，我們的確能够決定維數≤ 2的所有非同構李代數。在1維時只有一個基底向量x而且乘法表爲

$$[x, x] = 0\ (L2).$$

在2維時，說L的基底爲x, y。顯然L的所有乘積都是〔xy〕的純量倍。如果這些都是0則L爲交換的，不然，我們可以以〔xy〕所生成的一維空間中的一個非零向量代替x，然後再取與新的x不相關的向量代替。則$[xy]=ax(a\neq 0)$. 以$a^{-1}y$代替y我們終於得〔xy〕$=x$。因此，根據抽象的看法至多只存在一個非交換的L（讀者應當驗證〔xy〕$=x$確實定義一個李代數）。

習　題

1. 令L爲實向量空間$\mathbf{R}^3$，定義〔xy〕$=x\times y$（向量的義積）如果$x, y\in L$。試證　爲一李代數。試寫出關於$\mathbf{R}^3$的標準基底的結構常數。

2. 試證以下的等式以及那些由（$L1$），（$L2$）導出的等式定義一個李代數結構在一個三維向量空間上其基底爲（x, y, z）：

$$[xy] = z\,,[xz] = y\,,[yz] = 0$$

3. 設$x=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $h=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$爲$sl(2,\mathbf{F})$的有序基底。試計算$adx, adh$以及$ady$相對於此基底的矩陣。

4. 試求一線性李代數其與 (1.4) 中所造的非交換二維李代數同構。〔提示：請看看正則表現。〕

6. 設 $x\in(gln, \mathbf{F})$ 在 $\mathbf{F}$ 中有 n 個相異的固有值 $a_1, \cdots\cdots, a_n$，試證 $ad x$ 的固有值恰好是 n^2 個純量 $a_i-a_j(1\leq i, j\leq n)$，當然他們不必是相異的。

7. 設 $s(n, \mathbf{F})$ 爲 $gl(n, \mathbf{F})$ 中的純量矩陣（＝么矩陣的純量倍）的集合。如果 $char\,\mathbf{F}=0$ 或者是除不盡 n 的質數，試證 $gl(n, \mathbf{F})=s(n, \mathbf{F})+sl(n, \mathbf{F})$（向量空間的直和），而且 $[s(n, \mathbf{F}), gl(n, \mathbf{F})]=0$。

8. 試證 D_l 的維數爲 $2l^2-l$。

9. 當 $char\,\mathbf{F}=0$ 時試證每一個古典代數 $L=A_l, B_l, C_l$ 或 D_l 都有 $[L, L]=L$。（這又證明了每一個代數是由一些跡爲 0 的矩陣組成。）

10. 當 l 是一小的數值時，有一些古典代數是互爲同構的。試證 A_1, B_1, C_1 全都是同構，而 D_1 爲 1 維李代數。試證 B_2 與 C_2 是同構，D_3 與 A_3 是同構。D_2 如何呢？

11. 試證一 $\mathbf{F}$ 一代數的兩個導子的換位元素還是一個導子，而一般的乘積就不一定是。

2. 對於每一個古典線性李代數 $L\subset gl(V)$，如 (1.2) 中所述的，試證不論 V 的基底是如何選，L 的矩陣的轉置都落在 L 中。〔對 A_l 來說是顯然。對於 C_l 只須注意 $-s=s^{-1}$，然而對於 B_l 和 D_l，$s=s^{-1}$。〕

2. 理想與同態

2.1. 理　想

設 I 是李代數 L 的一個子空間。如果 $x\in L$，$y\in I$，則 $[xy]\in$

I（因爲 $[xy]=-[yx]$，條件也可以寫成：$[yx]\in I$。）則稱 I 是 L 的一個理想。理想在李代數理論中扮演的角色相當於正規子羣在羣論中以及雙側理想在環論中扮演的角色：他們是由同態（2.2）的核所引起的。

顯然 0（只包含零向量的子空間）和 L 爲 L 的理想。一個較不自明的例子是**中心** $Z(L)=\{z\in L\,|\,[xz]=0$ 對一切的 $x\in L\}$。利用 Jacobi 恆等式可以立刻證明 $Z(L)$ 爲一理想。另一個重要的例子是 L 的**導代數**，記爲 $[LL]$，它與一個羣的換位子子羣類似。它是由換位元素 $[xy]$ 的所有線性組合組成的，顯然是一個理想。

當然，L 爲可換代數當且僅當 $[LL]=0$。另一極端的情形是 $[LL]=L$。例如當 $L=sl(n,\mathbf{F})$(1,2) 由 L 的乘法表（如果 $char\,\mathbf{F}=2$，$n\neq 2$）可證明 $[LL]=L$。同理，對其他的古典線性李代數也是一樣（習題 1.9）。

若 I，J 爲李代數 L 的兩個理想，則 $I+J=\{x+y\,|\,x\in I,\,y\in J\}$ 也是一個理想。同理，$[IJ]=\{\sum[x_iy_i]\,|\,x_i\in I,\,y_i\in J\}$ 也是一個理想；（原書 $\sum x_iy_i$ 是錯的。）導代數 $[LL]$ 只是這種造法的一個特例。

藉對李代數的理想的研究來分析李代數的結構是很自然的。若 L 除了其本身及 0 以外沒有其他的理想而且 $[LL]\neq 0$ 時，我們稱 L 爲**單李代數**。條件 $[LL]\neq 0$（即 L 爲非交換的）的設置是爲了剔除一維的情形，因爲一維李代數顯然是沒有不自明的理想。當 L 爲單代數時，則 $Z(L)=0$ 而且 $[LL]=L$ 是顯而易見的。

譬如，令 $L=sl(2,\mathbf{F})$，$char\,\mathbf{F}\neq 2$ 取 L 的標準基底（參照 (1.2)）：

$$x=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ h=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

於是乘法表就完全由以下等式所決定:

$$[xy]=h,[hx]=2,x[hy]=-2y,$$

（注意，x，y，h為 adh 對應於固有值 2，－2，0 的固有向量。因為 $char\ \mathbf{F}\neq 2$，所以這些固有值都是相異。）如果$I\neq 0$為L的理想，令 $ax+by+ch$ 為I的任一非零元素。應用 adx 兩次，我們得$-2bx\in I$，又應用 ady 兩次，我們得$-2ay\in I$。因此，若a或b為非零，則I包含y或x($char\mathscr{F}\neq 2$)，因而$I=L$。他方面，若$a=b=0$，則$0\neq ch\in I$，所以$h\in I$，於是$I=L$。所以我們可結L論為單代數。

一旦李代數不為單時（而且也不是一維）也許可以“除以”一個非零眞理想而得一個較低維的李代數。**商代數** L/I（I為L的理想）的造法與商環的造法在形式上是一樣的: 看成是向量空間時 L/I 是商空間，其李乘法是定義為

$$[x+I,y+I]=[xy]+I.$$

這種定義是很淸晰的，因為若 $x+I=x+I$，$y+I-y''+I$，則有 $x'=x+u\ (u\in I)$, $y'=y\ y+v\ (v\in I)$，因此 $[x'y']=[x,y]+([uf]+[xv]+[uv])$。因為在括弧（　）內的各項都落在$I$內，所以 $[x'y']+I=[xy]+I$。

為了以後的用途我們順便提一些相關的觀念，這些觀念和羣論的觀念是一樣。L的子代數（或只是子空間）K的**正規化子**定義為

$$N_L(K)=\{x\in L\mid[xK]\subset K\}.$$

利用 Jacobi 恆等式，我們知 $N_L(K)$ 為L的子代數；若K為子代數，則我們也可說 $N_L(K)$ 是L中包含K且以K為其理想者之最大子代數。若 $K=N_L(K)$ 則稱X為**自正規化**；在以後將會出現一些有此性質的重要例子。　一個子集合X的**中心化子**定義為

$$C_L(X)=\{x\in L\mid[xX]=0\}.$$

再一次利用 Jacobi 恆等式而知 $C_L(X)$ 爲 L 的子代數。譬如 $C_L(L) = Z(L)$

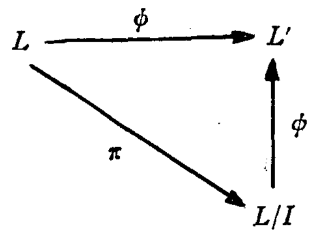
2.2 同態與表現

同態的定義的來由應是很自然的。一線性變換

$$\phi: L \longrightarrow L' \quad (L, L' \text{ 爲} \mathbf{F} \text{ 上的李代數})$$

如果對於一切的 $x, y \in L$ 有 $\phi([xy]) = [\phi(x)\phi(y)]$時，則稱 ϕ 爲**同態**。如果 $Ker\phi = 0$，稱爲**嵌型同態**。如果 $I_m\phi = L'$，稱爲**蓋型同態**（如(1.1)）如果它既是嵌型也是蓋型的同態，就稱爲**同構**。我們先做一個有趣的觀察，那就是 $Ker\,\phi$ 爲 L 的理想：事實上，如果 $\phi(x) = 0$ 而且 $y \in L$ 爲任意的，則 $\phi[xy] = [\phi(x)\phi(y)] = 0$。$I_m\phi$ 也顯然是 L' 的子代數。正如其他的代數理論，同態與理想之間存在一個自然的一一對應：對 ϕ 來說 $Ker\ \phi$ 爲一理想，對理想 I 來說，則相應有一個**自然同態**由 L 映至L/I 把 x 映至 $x + I$。以下的標準同態定理其證明很容易，留給讀者當做習題：

命題 (a) 如果 $\phi: L \to L'$ 爲李代數的同態，則 $L/Ker\phi \cong I_m\phi$ 如果 I 爲包含於 $Ker\phi$ 中的任何理想，則存在唯一同態 $\psi: L/I \to L'$ 使得以下的圖示交換（π = 自然同態）：



(b) 如果 I 和 J 爲 L 的理想而且 $I \subset J$ 則 J/I 爲 L/I 的理想而且 $(L/I)/(J/I)$ 和 L/J 之間存在一個自然的同構。

(c) 如果 I 和 J 爲 L 的理想，則在 $(I+J)/J$ 和 $I/I\cap J$ 之間存在一個自然同構。

所謂李代數 L 的一個**表現**也就是一個同態 $\phi: L\longrightarrow gl(V)$ (V 爲F 上的向量空間）。雖則我們要求 L 爲有限維，但如容許 V 爲任意維時是較有用的：$gl(V)$ 在任何情形下是有意義的。無論如何，目前必須記住的唯一重要例子是在 (1.3) 中所介紹的正則表現 $ad: L\rightarrow gl(L)$ 它把 x 送至 adx 其中

$$adx(y)=[xy]$$

(ad 的像集是落在 $DerL\subset gl(L)$ 不過我們暫時不考慮這一點。顯然，ad 是一線性變換。爲了證明它保持括弧之故，我們做如下的計算：

$$\begin{aligned}[adx, ady](z)&=adxady(z)-adyadx(z)\\ &=adx([yz])-ady([xz])\\ &=[x[yz]]-[y[xz]]\\ &=[x[yz]]+[[xz]y]=[[xy]z](L3')(L3)\\ &=ad[xy](z).\end{aligned}$$

ad 的核爲何？它是由那些 $x\in L$ 滿足 $adx=0$ 卽 $[xy]=0$ (所有的 $y\in L$) 者組成。所以 $Ker\ ad=Z(L)$ 這已有一個很有趣的結果：如果 L 爲單李代數，則 $Z(L)=0$，所以 $ad: L\rightarrow gl(L)$ 爲一嵌形。這是說任何一個單李代數都和一個線性李代數同構。

2.3. 自同構

所謂 L 的**自同構**也就是由 L 映至其本身的同構。$AutL$ 表示由一切的自同構組成的羣。當 L 爲線性李代數時則有一些重要的例子。如果 $g\in L(V)$ 爲 V 的可逆自同形而且如果 $gLg^{-1}=L$，則映射

$$x\longrightarrow gxg^{-1}$$

就是L的一個自同構。例如，設 $L=gl(V)$ 甚或 $sl(V)$，於是第二個條件自動滿足，所以依這樣的方法我們得到很多的自同構（參考習題11）

現在考慮特別的情形：$char\ \mathbf{F}=0$ 假定 $x\in L$ 爲一元素其 adx 爲冪零，卽存在某一整數 $k>0$ 使得 $(adx)^k=0$ 那麼C 上的線性變換的一般指數級數在 $\mathbf{F}$ 上是有意義的，因爲它只有有限項：

$$\begin{aligned}expadx=1+adx+(adx)^2/2!+(adx)^3/3!+\cdots\cdots\\+(adx)^{k-1}/(k-1)!.\end{aligned}$$

我們主張 $exp(adx)\in AutL$。更一般的，如果把 adx 換成 L 的任意一個冪零導子 δ 則其結果也還是眞。爲此之故，可利用熟悉的 Leibniz 規則：

$$\frac{\delta^n}{n!}(xy)=\sum_{i=0}^{u}(1/i!)(\delta^i x)(1/(n-i)!)(\delta^{n-i}y).$$

然後做如下的計算：（設 $\delta^k=0$）

$$\begin{aligned}exp\delta(x)exp\delta(y)&=\left(\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{\delta_i x}{i!}\right)\right)\left(\sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{\delta^j y}{j!}\right)\right)\\&=\sum_{n=0}^{2k-2}\left(\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{\delta^i x}{i!}\right)\left(\frac{\delta^{n-i}y}{(n-i)!}\right)\right)\\&=\sum_{n=0}^{2k-2}\frac{\delta^n(xy)}{n!}\quad\text{(Leibniz)}\\&=\sum_{n=0}^{k-1}\frac{\delta^n(xy)}{n!}\quad(\delta^k=0)\\&=exp\delta(xy)\ .\end{aligned}$$

至於證明 $exp\delta$ 爲可逆的這一件事我們只要直接找出它的逆元素（通常的方法）就可以了。

$$1+\eta+\eta^2-\eta^3+\cdots\cdots\pm\eta^{k-1},\ exp\delta=1+\eta\ ,$$

卽爲所求的逆元素。

設 adx 爲冪零，則形如 $exp(adx)$ 的自同構稱爲**內自同構**；更一般的，在 $AutL$ 中把由這些元素生成的子羣記爲 $IntL$ 而且就把它的元素稱爲內自同構。它是一個正規化子羣：若 $\phi\in AutL$, $x\in L$ 則 $\phi(adx)\phi^{-1}=ad\phi(x)$ 因此 $\phi exp(adx)\phi^{-1}=exp(ad\phi(x))$.

譬如，令 $L=sl(2,\mathbf{F})$ 而 (x,y,h) 爲 L 的標準基底。定義

$$\sigma=expadxexpad(-y)\cdot expadx$$

（所以 $\sigma\in IntL$）。計算 σ 在基底上的作用是很容易（習題10）：

$$\sigma(x)=-y,\sigma(y)=-x,\sigma(h)=-h$$

特別 σ 的階爲2。注意 $expx, exp(-y)$ 確爲 $SL(2,\mathbf{F})$ 的元素而且他們在 L 上的共軛作用保持 L 不變，所以乘積 $s=(expx)(exp-y)(expx)$ 引出 L 的一個自同構子 $z\longrightarrow szs^{-1}$。稍微計算一下可證出

$$s=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

而且 s 在 L 的共軛作用正好是與 σ 的作用一樣。

我們剛才所觀察到的現象並不是意外事件的：若 $L\subset gl(V)$ 爲任意的線性李代數（$char\ \mathbf{F}=0$）而且 $x\in L$ 爲冪零時我們主張

(*) $(exp\ x)y(exp\ x)^{-1}=expadx(y)$ 對一切的 $y\in L$ 成立。

爲證明這件事我們先注意到 $adx=\lambda_x+\rho_{-x}$, 其中 λ_x, ρ_x 表示在環 $End\ V$ 中以 x 左乘及右乘而得的映射（這兩者當然是交換但不是冪零）。於是利用通常的指數律可得

$$expadx=exp(\lambda_x+\rho_{-x})=exp\lambda_x\cdot exp\rho_{-x}=\lambda_{expx}\rho_{exp(-x)}$$

而這就證明了 (*)。

習　題

1. 試證所有的內導子 adx, $x\in L$ 組成 $DerL$ 的一個理想

2. 試證 $sl(n, \mathbf{F})$ 正好是 $gl(n, \mathbf{F})$ 的導代數（參考習題 1.9）。

3. 試證 $gl(n,\mathbf{F})$ 的中心爲 $s(n,\mathbf{F})$（純量矩陣）。

試證 $sl(n,\mathbf{F})$ 的中心爲 0 如果 $cher\,\mathbf{F}$ 除不盡 n，爲 $s(n,\mathbf{F})$ 如果 $char\,\mathbf{F}$ 除盡 n。

4. 試證（在同構下）$\mathbf{F}$ 上只有一個三維李代數其導代數爲一維而且落在 $Z(L)$ 內。

5. 假定 $dimL=3$，$L=[L,L]$。試證 L 必是單代數。〔首先觀察 L 的任意同態像也等於它的導代數。〕利用此結論再證明 $sl(2,\mathbf{F})$，$char\,\mathbf{F}\neq 2$ 的單純性。

6. 試證除了 $char\,\mathbf{F}=3$ 之外，$sl(3,\mathbf{F})$ 爲單代數。〔試利用標準基底 $h_1, h_2, e_{ij}(i\neq j)$ 如果 $I\neq 0$ 爲一理想，則 I 爲 adh_1 或 adh_2 的固有空間的直和；試比較 adh_1, adh_2 在 e_{ij} 上的作用。〕

7. 試證 $t(n,\mathbf{F})$ 及 $d(n,\mathbf{F})$ 爲 $gl(n,\mathbf{F})$ 的自正規化子代數，而 $n(n,\mathbf{F})$ 的正規化子 $t(n,\mathbf{F})$

8. 試證在 $char\,\mathbf{F}=0$ 的情形下，(1.2) 中的每一個古典線性李代數裏的對角矩陣的集合都自正規化子代數。

9. 試證命題 2.2。

10. 設 σ 爲 $sl(2,\mathbf{F})$ 的自同構其定義正如 (2.3) 中的 σ。試證

$$\sigma(x)=-y,\ \sigma(y)=-x,\ \sigma(h)=-h$$

11. 設 $L=sl(n,\mathbf{F})$, $g\in GL(n,\mathbf{F})$ 試證映射 $L\to L$ 定義爲

$$x\longrightarrow -gx^tg^{-1}\ (x^t=x \text{ 的轉置})$$

爲 $Aut\,L$ 的一個元素。當 $n=2$，$g=$么矩陣時試證比自同構爲內自同構。

12. 設 L 爲正交李代數（B_l 或 D_l 型）。若 g 爲正矩陣，即 g 爲可逆而且 $g^tsg=s$，試證 $x\longrightarrow gxg^{-1}$ 在 L 上定義一個自同構。

3. 可解李代數與冪零李代數

3.1. 可解性

經由李代數L的理想研究李代數是很自然的做法。在這一節我們將展示導代數的形成。首先定義 L 的一序列理想（**導來鏈**）$L^{(0)}=L, L^{(1)}=[LL], L^{(2)}=[L^{(1)}L^{(1)}], \cdots\cdots, L^{(i)}=[L^{(i-1)}L^{(i-1)}]$。如果存在某一正整數$n$使得 $L^{(n)}=0$ 稱L爲**可解**。譬如，Abel 導致可解，然而單代數一定是非可解。

有一個相當一般的例子那就是在(1.2)中所介紹的代數 $t(n, \mathbf{F})$，它是由上三角矩陣組成的。$t(n, \mathbf{F})$ 有一組明顯的基底是由矩陣 e_{ij}, $i \le j$ 組成；其維數爲

$$1+2+\cdots\cdots+n=n(n+1)/2\text{。}$$

爲證明 $L=t(n, \mathbf{F})$ 爲可解之故我們利用（1, 2）的換位子公式明確地計算它的導來鏈特別我們有 $[e_{ii}, e_{il}]=e_{il}$, $i<l$ 這就證明 $n(n, \mathbf{F}) \subset [LL]$ 其中 $n(n, \mathbf{F})$ 爲由上三角冪零矩陣組成的子代數。因爲

$$t(n, \mathbf{F})=d(n, \mathbf{F})+n(n, \mathbf{F})$$

以及因爲 $d(n, \mathbf{F})$ 爲 Abel, 我們結論 $n(n, \mathbf{F})$ 爲L的導代數（參考習題 1.5）。其次我們考慮 $n(n, \mathbf{F})$，我們有一所謂 e_{ij} 的"高度"的觀念即 $j-i$。在換位子的公式中，設 $i<j$, $k<l$ 在不漏掉任何乘積下我們也不妨假設 $k \ne l$。則 $[e_{ij}, e_{kl}]=e_{il}$（如果 $j=k$）或 0（其他情形）。特別每一個 e_{il} 爲兩個矩陣的換位子而此兩個矩陣高度和等於 e_{il} 的高度。我們結論 $L^{(2)}$ 是由那些高度≥ 2的的元素 e_{ij} 所生成，$L^{(i)}$ 是由那些高度 $\ge 2^{i-1}$ 的元素生成的。最後，顯然每當 $2^{i-1}>n-1$ 時則 $L^{(i)}=0$.

其次我們收集一些關於可解性的結果。

命題　設L爲李代數。

(a) 若L爲可解，則L的一切子代數及其同態像都是可解的。

(b) 若I爲L的可解理想 L/I 又爲可解，則L本身亦爲可解。

(c) 若I，J爲L的可解理想，則$I+J$亦爲可解理想。

證明　(a) 由定義，若K爲L的子代數，則 $K^{(i)}\subset L^{(i)}$。同理，若$\phi: L\to M$爲蓋形，用歸納法可證明 $\phi(L^{(i)})=M^{(i)}$.

(b) 設 $(L/I)^{(n)}=0$。將 (a) 應用到 $\pi: L\to L/I$ 去，我們得 $\pi(L^{(n)})=0$或 $L^{(n)}\subset I=ker\,\pi$。現在若$I^{(m)}=0$，則由顯然的事實 $(L^{(i)})^{(j)}=L^{(i+j)}$ 將導致 $L^{(n+m)}=0$（將 (a) 的證明應用到 $L^{(n)}\subset I$的情形上）。

(c) 標準同態定理中的一個結果（命題2.2(e)）證明了$(I+J)/J\cong I/(I\cap J)$。看成是 I 的同態像，我們知道右端者爲可解，所以 $(I+J)/J$ 爲可解。於是將 (b) 應用到$I+J$，J上而得知 $I+J$ 爲可解。

做爲第一個應用我們考慮以下的情形，設L爲任意李代數而S爲極大可解理想（即不包含於任何更大的可解理想）。如果I爲L的任何另一個可解理想，則上述命題 (c) 迫使$I+S=S$（由於 S 的極大性），或$I\subset S$。這就證明唯一極大可解理想的存在性，稱之爲L的**根基**而記爲 $Rad\,L$ 如果$L\neq 0$而且 $Rad\,L=0$。那麼 L 就稱爲**半單**。譬如，單代數就是半單：L除了本身及0外沒有其他的理想，而且L爲非可解。注意如果L爲不可解，即$L\neq Rad\,L$，則$L/Rad\,L$爲半單（利用命題的 (b)）。研究半單李代數（$char\,\mathbf{F}=0$）將佔本書大部分的篇幅。（不過同時也會需要一些可解子代數）。

3.2.　冪零性

可解的定義是模仿羣論的相應觀念，這該回溯到 Abel 和 Galois

的工作。相對的，冪零羣的觀念是最近的而且是模仿李代數中的相應觀念。定義L的一序列理想(**降中心鏈**，也稱爲**下中心鏈**) 如$L^0=L$, $L^1=[L,L](=L^{(1)})$, $L^2=[LL^1]$, ……$L^i=[LL^{i-1}]$。如果存在某一正整數n使得$L^n=0$，則L稱爲冪零。譬如，任何交換代數爲冪零。顯然，$L^{(i)}\subset L^i$ 對一切i成立，所以冪零代數爲可解。然而逆命題不能成立。再考慮$L=t(n,\mathbf{F})$・(3.1) 中的討論證明了 $L^{(i)}=L^i=n(n,\mathbf{F})$ 而且$L^2=[LL']=L'$。所以對所有$i\geq 1$, $L^i=L^1$。他方面，也很容易看出 $M=n(n,\mathbf{F})$ 爲冪零：M^1 是由那些高度爲2的 e_{ij} 所生成的，M^2是由那些高度爲了3，所生成的，……，M^i 是由那些高度爲 $i+1$ 所生成的。

命題　設L爲李代數

(a) 若L爲冪零，則L的所有子代數及同態像亦爲冪零。

(b) 若 $L/Z(L)$ 爲冪零，則L亦爲冪零。

(c) 若L爲冪零，則 $Z(L)\neq 0$。

證明 (a) 模仿命題 3.1(a) 的證明。

(b) 設 $L^n\subset Z(L)$ 則 $L^{n+1}=[LL^n]\subset[LZ(L)]=0$。

(c) 下中心鏈的最後一非零項落在 $Z(L)$ 中。

L爲冪零的條件也可以重新敍述如下：存在某一正整數n (只與L有關) 使得對一切 $x_i, y\in L$ 有 $adx_1\cdots\cdots adx_n(y)=0$。特別對一切$x\in L$, $(adx)^n=0$。現在設L爲李代數而$x\in L$。如果adx爲冪零自同態我們就稱x爲 ad 冪零。利用這語言則上面的結論可敍述爲若L爲冪零則L的一切元素爲 ad-冪零。有一個令人感到意外的驚喜那就是逆命題居然也成立。

定理 (**Engel**) 若L的一切元素都是 ad-冪零，則L爲冪零。

我們將在下一小節證明此定理。利用 Engel 定理我們能不用計算降中心鏈而很容易證明 $n(n,\mathbf{F})$ 爲冪零。我們只須應用以下的簡單

引理。

引理 設 $x \in gl(V)$ 是一個冪零自同態，則 adx 也是冪零。

證明 如 (2.3) 對於 x 我們可以考慮 $EndV$ 中兩個相關的自同態，左平移與右平移 $\lambda_x(y), \rho_x(y)=yx$。由於 x 爲冪零所以此兩者亦爲冪零。而且 λ_x 與 ρ_x 顯然是交換的。在任何環中（這裏所考慮的是 $End(End(V))$ 兩個冪零元素的和與差還是冪零（爲什麼？）所以 $ad_x=\lambda_x-\rho_x$ 爲冪零。

注意：在 $gl(n, \mathbf{F})$ 中很容易找到一個矩陣是 ad-冪零而本身卻不是冪零。（幺矩陣即爲一例）。讀者須記住，冪零線性李代數的兩個相對型：$d(n, \mathbf{F})$ 及 n $(n, \mathbf{F})$。

3. 3. Engel 定理的證明

Engel 定理可由以下的結果得到，這結果其本身是很有意思的。我們記得單獨的冪零線性變換至少有一個固有向量相應它那唯一的固有值 0。這正是以下定理在 $dim\, L=1$ 的情形。

定理 設 L 爲 $gl(V)$ 的子代數，V 爲有限維。如果 L 是由冪零自同態所組成而且 $V\neq 0$，則存在非零 $v\in V$ 使得 $L\cdot v=0$。

證明：用數學歸納法證明。在 $dim L=0$（或 $dim\, L=1$）時定理是顯然的。假定 $K\neq L$ 爲 L 的任意子代數。根據引理3. 2, K（經由 ad）可看成是作用在向量空間 L 上因而也能看成是向量空間 L/K 的冪零線性變換的李代數。因爲 $dim\, K<dim\, L$ 歸納法的假設保證存在一向量 $x+K\neq K\in L/K$ 使得 $adK.\ x+K=K$。這也就是說，對一切 $y\in K, [yx]\in K$，其中 $x\notin K$。換句話說 $K\subsetneq N_L(K)$（K 在 L 中的正規化子，參照 (2.1)）。

現在取 K 爲 L 的最大眞子代數。前面的討論使得 $N_L(K)=L$ 即 K 爲 L 的理想。如果 $dim\, L/K>1$，則 L/K 的 1 維子代數（恆存

在）的像原爲L的眞子代數而且它包含K但又不等於K，這是不可能的；所以 $dimL/K=1$。因而$L=K+\mathbf{F}z$, $z\in L-K$。

由歸納法，$W=\{v\in V\,|\,Kv=0\}$ 爲非零。因爲K爲一理想，W在L的作用下保持不變：$x\in L$, $y\in K$, $w\in W$ 導致 $yx.w=xy.w-[x,y].w=0$。取$z\in L-K$如上，則冪零自同態z（現在作用在W上）有一固有向量，卽存在非零$v\in W$使得 $z.v=0$。最後 $L.v=0$ 而且定理得證。

Engel 定理的證明。我們已知李代數L的一切元素是 ad-冪零；所以代數 $adL\subset gl(L)$ 滿足定理 3.1 的假設。（我們能够假設$L\neq 0$）結論：L中存在$x\neq 0$使得$[Lx]=0$ 卽 $Z(L)\neq 0$。現 $L/Z(L)$ 顯然是由 ad 冪零元素組成而且其維數是小於 L 的維數。利用歸納法，我們得知 $L/Z(L)$ 爲冪零。命題 3.2(b) 主張L冪零。

定理 3.3 有一相當有用的推論（事實上是等價的看法），它證明$n(n,\mathbf{F})$ 是多麼的典型。首先先給一個定義。如果V 爲有限維向量空間（就說 $dim\,V=n$）V中的**旗**是指一串子空間

$$0=V_0\subset V_1\subset\cdots\cdots\subset V_n=V,$$

$dimV_i=i$。假設 $x\in End\,V$。我們說x作用在旗上是穩定的意思是指對一切i, $xV_i\subset V_i$。

系　在定理的假設下，V中存在一旗（V_i）其在L的作用下保持不變而且對一切i, $xV_i\subset V_{i-1}$。

證明　先取一非零向量$v\in V$滿足 $L.v=0$，其存在性是根據定理的主張。置 $V_1=\mathbf{F}v$。令 $W=V/V_1$，而且經由觀察知L在W上所引的作用還是冪零。由歸納法的假設，知W有一旗在L的作用下保持不變，因而它的像原也滿足定理的主張故得證。

爲結束此節，我們舉出定理 3.3 的一個典型的應用，在以後我們將用到它。

引理　設L爲冪零，K爲L的理想。如果$K\neq 0$時則$K\cap Z(L)\neq 0$（特別$Z(L)\neq 0$；參考命題 3.2(c)）。

證明　經由正則表現，L能作用於K上，故由定理 3.3 得一非零$x\in K$使得$ad L.x=0$　即〔Lx〕$=0$　所以　$x\in K\cap Z(L)$。

習　　題

1. 設I爲L的理想。則I的導來鏈或降中心鏈的每一項也都是L的理想。

2. 試證L爲可解當且僅當存在一串子代數

$$L=L_0\supset L_1\supset L_2\supset\cdots\cdots L_k=0$$

使得 L_{i+1} 爲 L_i 的理想而且每一商代數 L_i/L_{i+1} 爲 Abel

3. 令 $char\,\mathbf{F}=2$。試證 $sl(2,\mathbf{F})$ 爲冪零。

4. 試證L爲可解（或冪零）當且僅當 $ad L$ 爲可解(或冪零)。

5. 試證（1.4）中所造的非 Abel 2 維代數爲可解而非冪零。同樣地證明習題 1.2 中的代數也是如此。

6. 試證李代數L的兩個冪零理想的和還是冪零。所以L有一個唯一的極大冪零理想，稱爲**冪零根基**。試決定習題 5 中每一個代數的冪零根基。

7. 設L爲冪零，K爲L的眞子代數。試證 $N_L(K)\supsetneq K$。

8. 設L爲冪零。試證L有一理想其餘維爲 1。

9. 試證每一個冪零李代數L有一外導子（參照（1.3））如下：對L的某一餘維爲 1 的理想 K(習題 8)，記$L=K+\mathbf{F}x$，則 $C_L(K)\neq 0$（爲什麼？）。選擇正整數n使得 $C_L(K)\subset L^n, C_L(K)\not\subset L^{n+1}$，並且令$z\in C_L(K)-L^{n+1}$。則將$K$映至 0 而將 x 映至 z 子的線性映射δ爲一外導子。

10. 設L爲一李代數，K爲L的理想使得L/K爲冪零而且使得對一切$x\in L, adx|_K$ 爲冪零。試證L爲冪零。

第二章　半單李代數

在第一章中我們考慮佈於任意體 $\mathbf{F}$ 上的李代數。除了介紹一些基本概念和例子外，我們只能證明一個實質的定理（Engel 定理）。事實上，在本書中其他所要發展的理論都須要一個假設那就是 $char\mathbf{F} = 0$。（在一些習題中將指出在質特徵的情形下反例是如何產生）而且，爲了對於任何 x（不僅僅是 $ad x$ 爲冪零）$ad x$ 都有可用的固有值除非特別提到其他的情形否則我們將假定 $\mathbf{F}$ 爲代數封閉的。如欲將施於 $\mathbf{F}$ 上的條件限制稍微放鬆一些而做類似的討論是有可能的（參考 Jacobson〔1〕，107 頁），不過在這裏我們將不那麼做。

4.　Lie 定理與 Cartan 定理

4.1.　Lie 定理

有關冪零李代數的 Enger 定理其實質的主張是對於由冪零自同態組成的李代數來說一定存在一個共同的固有向量（定理 3.3）。下一個定理在性質上是一樣的，不過爲了使得 $\mathbf{F}$ 包含所需要的固有值之故我們要求 $\mathbf{F}$ 是封閉的。結果也必須要求 $char\ \mathbf{F} = 0$（習題 3）。

定理　設 L 是 $gl(V)$ 的可解子代數，V 是有限維。如果 $V \neq 0$，則對於 L 中一切自同態，V 中有一共同的固有向量。

證明　利用數學歸納法。在 $dim\,L = 0$ 的情形下定理是自明的。我們想模仿定理 3.3 的證明（讀者應當複習一下）。我們想法是 (1)

找一個餘維數爲1的理想 即 $dimL/K=1$,(2) 利用歸納法證明K的共同固有向量存在,(3) 證明在L的作用下由這樣的固有量組成的空間保持不變,以及 (4) 若$L=K+\mathbf{F}z$,則試在上述的空間中找出 z 的一個固有向量。

第一步驟是很容易的。因爲 L是可解而且 $dim\,L\supset 0$ 所以 $L\subsetneqq$ $[LL]$。$L/[LL]$是交換的,所以任何子空間都自動成爲理想。取一子空間其餘維爲1,則其像原K爲一理想(包含 $[LL]$)而且 $dimL/K=1$。

第二步驟,利用數學歸法找出 K 的共同固有向量 $v\epsilon V$,(K當然是可解;如果$K=0$,則L爲1維交換代數而且L的基底向量的固有向量就是我們所要的故得證。)這是說對於 $x\epsilon K, x\cdot v=\lambda(x)v$,$\lambda=K\to F$爲某一個線性函數。固定此$\lambda$而以$W$表示子空間

$$\{w\epsilon V\,|\,x\cdot w=\lambda(x)w,\ \text{對一切}\ x\epsilon K\},$$

則$W\neq 0$。

第三步驟是證明在L的作用下W保持不變。暫時假定這一步驟已做完,我們進行第四步驟:記$L=K+\mathbf{F}z$,並且利用 $\mathbf{F}$ 的代數封閉性而找出z在W中的固有向量 v_0(對應於z的某一個固有值)。則v_0顯然是L的共同固有向量(而且λ可以擴張成爲L上的線性函數使得 $x\cdot v_0=\lambda(x)v_0, x\in L$)。

現在只須證明在L的作用下 W 保持不變就可以了。令$w\in W, x\in L$。爲了想知道 $x\cdot w$ 是否落在W中我們須取任意$y\in K$而且檢驗 $yx.w=xy.w-[xy].w=\lambda(y)x\cdot w-\lambda[xy]w$。因此我們必須證明 $\lambda[xy]=0$。爲此之故,固定$w\in W, x\in L$。令n爲最小正整數使得 $w\,x.w,\cdots\cdots,x^n.w$ 爲線性相關。令W_i爲 $w,x.w,\cdots\cdots,x^{i-1}.w$ 所生成的子空間(置$W_0=0$),所以 $dim\,W_n=n, W_n=W_{n+i}(i\geq 0)$ 而且x把 W_n 送至 W_n。我們容易驗證每一$y\in K$都保持每一個W_i不

變。關於 W_n 的基底 $w, x.w, \cdots\cdots x.^{n-1}w$，我們主張 $y\in K$ 可表爲上三角矩陣其對角線成分爲 $\lambda(y)$。這可立即由以下的同餘式得到：

(*) $$yx^i.w\equiv\lambda(y)x^i.w(modW_i).$$

因此可用數學歸納法證明上式。在 $i=0$ 的情形下上式是顯然的。記 $yx^i.w=yxx^{i-1}w-[xy]x^{i-1}.w$。由歸納法假設，$yx^{i-1}.w=\lambda(y)x^{i-1}.w+w'(w'\in W_{i-1})$；因爲 x 把 W_{i-1} 映至 W_i（根據 W_i 的造法），(*) 因此對一切 i 成立。

$y\in K$是根據我們的描述方式作用於 W_n 上，$Tr_{W_n}(y)=n\lambda(y)$。這對於K中具有特別形式 $[x,y]$（x 如上，$y\in K$）的元素是成立的。但是x，y 兩者皆使W_n保持不變，所以 $[x,y]$ 在 W_n 上的作用有如 W_n 的兩個自同態的換位子；它的跡因而爲 0。我們得 $n\lambda([x,y])=0$。因爲 $char\mathbf{F}=0$，所以 $\lambda(x,y)=0$，正如所求。

系 1（Lie 定理）。令L爲 $gl(V)$ 的一個可解子代數 $dimV=n<\infty$。則L使V中的某一旗保持穩定（換句話說，關於V的某一適當基底，L的矩陣成爲上三角形）。

證明　利用定理及數學歸納法。

更一般的，令L爲任意可解李代數，$\phi: L\rightarrow gl(V)$ 爲L的有限維表現。則依命題 3.1(a)，$\phi(L)$ 爲可解，因而使某一旗保持穩定（系 1）。譬如，如果ϕ爲正則表現，則在L的作用下保持穩定的旗正好是L的一串理想，其中每一個理想在下一個中的餘維都是 1。這證明了以下的系理。

系 2. 令L爲可解。則存在L 的一串理想，$0=L_0\subset L_1\subset\cdots\cdots\subset L_n=L$，使得 $dim\,L_i=i$。

系 3. 令L爲可解。如果 $x\in[LL]$，則 ad_Lx 爲冪零。特別，$[LL]$ 爲冪零。

證明。如系 2 找出一串理想。關於L的基底 $(x_1,\cdots\cdots,x_n)$ 其中

$(x_1, \cdots\cdots x_l)$ 生成 L_l, $ad\,L$ 的矩陣落在 $t(n, \mathbf{F})$ 中。所以 $[adL, adL] = ad_L[LL]$ 落在 $n(n, \mathbf{F})$ 中，即 $t(n, \mathbf{F})$ 的導代數。所以對一切 $x \in [L, L]$, $ad_L x$ 爲冪零；當然 $ad_{[LL]} x$ 爲冪零，依 Engel 定理 $[LL]$ 所以是冪零。

4.2. Jordan-Chevalley 分解

只在這一小節中，*char* $\mathbf{F}$ 可以是任意。爲了要介紹一個對研究線性變換是很有用的工具我們暫時撇開本題。讀者應記得在代數封閉體上的單獨自同態 x 的 Joran **典型形式**是以下塊狀矩陣的和。

$$\begin{pmatrix} a & 1 & & & 0 \\ & a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & a \end{pmatrix}$$

因爲 $diag(a, \cdots\cdots, a)$ 與冪零矩陣

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

可以交換，所以 x 可以寫成能互相交換的對角矩陣及冪零矩陣的和。我們能夠將此分解做得更確切些，做法如下。

如果 $x \in EndV$（V 有限維）在 $\mathbf{F}$ 上的最低多項式有相異的根。則稱 x 爲半單。也可以說($\mathbf{F}$ 爲代數封閉的)，x 爲半單當且僅當 x 爲可對角化。我們應注意到兩個交換的半單自同態是可以同時對角化；所以他們的和或差還是半單（習題 2）。又當 x 爲半單而且又能把 V 的子空間 W 映至其本身時，則 x 限制在 W 上也顯然是半單。

命題。令V爲 $\mathbf{F}$ 上的有限維向量空間，$x\in EndV$。則

(a) 存在唯一 $x_s, x_n\in EndV$ 滿足條件:

$$x=x_s+x_n$$

x_s 爲半單，x_n 爲冪零，x_s 和 x_n 可交換。

(b) 存在兩個無常數項的多項式 $p(T), q(T)$ 使得 $x_s=p(x)$, $x_n=q(x)$。特別，如果任何自同態會和x交換時必也會跟 x_s 及 x_n 交換。

(c) 如果 $A\subset B\subset V$ 爲子空間，而且x 將 B映至A，則 x_s 及 x_n 也將B映至A。

分解 $x=x_s+x_n$ 稱爲x 的（加法）Jordan-Chevalley 分解，或只稱爲 Jordan 分解；x_s, x_n（分別）稱爲x的半單部和冪零部。

證明　令 $a_1, \cdots\cdots, a_k$（重覆數爲$m_1, \cdots\cdots, m_k$）爲 x 的相異固有值，所以固有多項式是 $\pi(T-a_i)^{m_i}$。如果 $V_i=kes(x-a_i\cdot 1)^{m_i}$，則$V$爲子空間 $V_1, \cdots\cdots, V_k$ 的直和，而且每一個 V_i 在x的作用下保持不變。在 V_i 上，x顯然有固有多項式 $(T-a_i)^{m_i}$。現在應用中國餘式定理（對於環 $\mathbf{F}[T]$ 而言）可以找到一個多項式滿足互質模的聯立同餘式:

$$p(T)\equiv a_i(mod(T-a_i)^{m_i})$$

$$p(T)\equiv 0\,(mod\ T).$$

（注意，如果0爲x的固有值，則最後一個同餘式是多餘的，否則T和其他的模爲互質。）置 $q(T)=T-p(T)$。因爲 $p(T)\equiv 0\,(modT)$ 所以 $p(T)$ 和 $q(T)$ 的常數項都是0。

置 $x_s=p(T), x_n=q(T)$。因爲他們是x的多項式，所以 x_s 和 x_n 互爲交換，同時也和那些會和x交換的自同態交換。他們也穩定V中一切被x穩定的子空間，特別是 V_i。同餘式 $p(T)\equiv a_i(mod(T-a_i)^{m_i})$ 證明了對一切 $i\,x_s-a_i\cdot 1$ 在 V_i 上的作用爲零，因此x_s 在

V_i 上的作用是對角的而且只有一個固有值 a_i。依定義 $x_n=x-x_s$，x_n 的冪零性就顯得更清楚。因爲 $p(T), q(T)$ 沒有常數項，因此 (c) 也是很明顯。

現在只剩下 (a) 中的唯一性須要證明。設 $x=s+n$ 是這種分解的另一個表現形式，則我們有 $x_s-s=n-x_n$。因 (b) 之故，我們所看到的自同態都是可交換。可交換的半單（或冪零）自同態的和還是半單（或冪零）自同態，然而只有 0 才可能既是半單又是冪零。所以 $s=x_s$, $n=x_n$。

爲了說明 Jordan 分解爲什麼是有用的工具我們看一些特例。考慮李代數 $gl(V)$ 的正則表現，其中 V 爲有限維。如果 $x\in gl(V)$ 爲冪零，則 adx 也是冪零(引理 3.2)。同理，如果 x 是半單，則 adx 也是半單。我們證明此點如下。取 V 的一組基底 $(v_1, \cdots\cdots, v_n)$ 使得 x 的矩陣表現爲 $\mathrm{diag}(a_1, \cdots\cdots, a_n)$。令 $\{e_{ij}\}$ 爲 $gl(V)$ 關於 $(v_1, \cdots\cdots, v_n)$ 的標準基底(1.2)：$e_{ij}(v_k)=\delta_{jk}v_i$。經由簡明的計算（參考(1.2)中的(*)）可得 $adx(e_{ij})=(a_i-a_j)e_{ij}$。所以 adx 對於 $gl(V)$ 所選取的基底有對角矩陣表現。

引理1.　令 $x\in EndV(dimV<\infty)$，$x=x_s+x_n$ 爲其 Jordan 分解。則 $adx=adx_s+adx_n$ 爲 adx（在 End（$EndV$）中）的 Jordan 分解。

證明　我們已看到 adx_s 和 adx_n 分別爲半單和冪零；因爲 $[adx_s, adx_n]=ad[x_s, x_n]=0$ 所以他們是可交換。於是應用命題的 (a) 部分就可以了。

另外一個有用的事實如下。

引理2.　令 $\mathscr{A}$ 爲有限維 F-代數。則 $Der\mathscr{A}$ 包含它的一切元素（在 $End\mathscr{A}$ 中）的半單部及冪零部。

證明。如果 $\delta\in Der\mathscr{A}$，令 σ，$\nu\in End\mathscr{A}$ 分別爲它的半單和冪

零部分。現在只要證明 $\sigma \in Der\mathscr{A}$ 就足够了。對於 $a \in \mathbf{F}$，置 $\mathscr{A}_a = \{x \in \mathscr{A} \mid$ 對某一 k (只和 x 有關)，$(\delta - a.1)^k x = 0\}$。則 $\mathscr{A}$ 爲 $\mathscr{A}_a$ 的直和，其中 a 爲 σ（或 δ）的固有值，而且 σ 作用 $\mathscr{A}_a$ 上就如以 a 作純量乘法。我們能够藉一個一般公式:

(*) $$(\delta-(a+b).I)^n(xy)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}((\delta-a.I)^{n-i}x)\cdot((\varrho-b.I)^i y),$$

對一切 $x, x \in \mathscr{A}$

（此公式可用數學歸納法證明）證明 $\mathscr{A}_a\mathscr{A}_b \subset \mathscr{A}_{a+b}$，其中 a，$b \in F$。現在如果 $x \in \mathscr{A}_a$, $y \in \mathscr{A}_b$，則 $\sigma(xy) = (a+b)xy$，因爲 $xy \in \mathscr{A}_{a+b}$（可能是 0）；他方面，$\sigma(x)y + x(\sigma y) = (a+b)xy$。依直和 $\mathscr{A} = \amalg \mathscr{A}_a$，$\sigma$ 爲一導子，故得證。

4.3. Cartan 準則

我們現在已可以求得李代數 L 的可解性的一個有力的判斷準則，此準則是基於 L 的某些自同態的跡。顯然如果 $[LL]$ 爲冪零則 L 爲可解（這是系 4.1.3 的逆敍述）。然而由 Engel 定理知 $[LL]$ 爲冪零當（且僅當）每一個 $ad_{[LL]}x$，$x \in [LL]$，爲冪零。所以我們先從同態的冪零性的跡判斷準則開始。

引理。令 A, B 爲 $gl(V)$ 的兩個子空間，$dimV < \infty$。置 $M = \{x \in gl(V) \mid [x, B] \in A\}$。假定 $x \in M$ 滿足 $Tr(xy) = 0$ 對一切 $y \in M$。則 x 爲冪零。

證明。令 $x = s + n$ $(s = x_s, n = x_n)$ 爲 x 的 Jordan 分解。固定 V 的一組基底使得 s 有矩陣表現 $\mathrm{diag}(a_1, \cdots\cdots, a_m)$。令 E 爲 F 中由固有值 $a_1, \cdots\cdots, a_m$ 生成的向量子空間（佈於 $\mathbf{Q}$ 上）。我們必須證明 $s = 0$ 或者 $E = 0$。因爲 E 在 $\mathbf{Q}$ 上是有限維（依造法），所以只要證明

對偶空間 E^* 爲 0 就可以，卽證明任意線性函數 $f: E\to \mathbf{Q}$ 都是零。

給定 f，令 y 爲 $gl(V)$ 的元素而其關於固定的基底的矩陣表現爲 diag $(f(a_1),\cdots\cdots,f(a_m))$。若 $\{e_{ij}\}$ 是 $gl(V)$ 的相應基底，在 (4.2) 中我們看到:

$$ads(e_{ij})=(a_i-a_j)e_{ij}$$
$$ady(e_{ij})=(f(a_i)-f(a_j))e_{ij}.$$

現令 $r(T)\in F[T]$ 爲一無常數項的多項式而且假定 $r(T)$ 滿足 $r(a_i-a_j)=f(a_i)-f(a_j)$ 對一切 i，j。$r(T)$ 的存在可由 Lagrange 插值法而得的；對於指定的值是很明確的，這是因爲如果 $a_i-a_j=a_k-a_l$ 則由 f 的線性可得 $f(a_i)-f(a_j)=f(a_k)-f(a_l)$。顯然 $ady=r(ads)$。

現在 ads 爲 adx 的半單部，依 (4.2) 的引理 1，它能够寫成 adx 的多項式但不具有常數項（命題 4.2)。所以 ady 也是 adx 的多項式而不具有常數項。依假設，adx 把 B 映至 A，所以我們也有 $ady(B)\supset A$，卽 $y\in M$。利用引理的假設，$Tr(xy)=0$，我們得 $\sum a_i f(a_i)=0$。左端爲 E 的元素的 $\mathbf{Q}$-線性組合，取其 f 值，我們得之 $f(a_i)^2=0$。但是數 $f(a_i)$ 爲有理數，所以 $f(a_i)=0$ 對一切 i 成立。最後，因爲 a_i 生成 E 所以 f 恆爲 0。

在敍述可解性的判斷準則之前，我們先寫出一些有用的等式；如果 x,y,z 爲有限維向量空間的自同態，則

$$(*)\qquad Tr([x,y]z)=Tr(x[y(z)])。$$

爲證明這一點，我們先考慮 $[x,y]z=xyz-yxz$，$x[y,z]=xyz-xzy$，然後再利用 $Tr(y(xz))=Tr((xz)y)$ 的事實就可以了。

定理（**Cartan 準則**）。令 L 爲 $gl(V)$ 的子代數，V 爲有限維。假定 $Tr(xy)=0$ 對一切 $x\in[LL]$，$y\in L$。則 L 爲可解。

證明。正如 (4.3) 開頭的說明，只要證明 $[LL]$ 爲冪零，或者

一切 $x\in[LL]$ 均爲冪零自同態（引理 3.2 和 Engel 定理）就可以了。爲此之故，我們將上面的引理應用到以下的情形：V 如上，$A=[LL]$，$B=L$，所以 $M=\{x\in gl(V)\mid[xL]\subset[LL]\}$。顯然 $L\subset M$。我們的假設是對一切 $x\in[LL]$, $y\in L$，恆有 $Tr(xy)=0$，然而爲了要利用引理來證明每一個 $x\in[LL]$ 爲冪零我們需要更強的敍述：對一切 $x\in[LL]$，$y\in M$，$Tr(xy)=0$。

現在如果 $[xy]$ 爲 $[LL]$ 的典型生成元，而且 $z\in M$，則上面的等式證明 $Tr([x,y]z)=Tr(x[yz])=Tr([yz]x)$。由 M 的定義 $[y,z]\in[L,L]$，所以根據假設得知右端爲 0。

系　令 L 爲李代數。如果對一切 $x\in[LL]$，$y\in L$，恒有 $Tr(adx\,ady)=0$，則 L 爲可解。

證明。將定理應用到 L 的正則表現，我們得知 adL 爲可解。又因爲 $Ker\ ad=Z(L)$ 爲可解，所以 L 本身亦爲可解（命題 3.1）。

習　題

1. 令 $L\subset gl(V)$ 爲古典線性李代數（1.2)。試利用 *Lie* 定理以及習題 1.12，證明 $Rad\,L=Z(L)$。特別 $sl(n,\mathbf{F})$ 爲半單（參考習題 2.3）。〔由觀察得知 $Rad\,L$ 落在 L 的每一個極大可解子代數 B 中。取 V 的一組基底使得 $B=L\cup t(n,\mathbf{F})$，而且注意 B 的轉置也是 L 的極大可解子代數。由此而結論 $Rad\,L\subset L\cap d(n,\mathbf{F})$，則 $Rad\,L=Z(L)$。〕

2. 試證在 $imV<char\,\mathbf{F}$ 的情形下，定理 4.1 的證明對質特徵數的情形還是有效的。

3. 這個習題說明當 $\mathbf{F}$ 的特徵爲質數 q 時，*Lie* 定理不能成立。考慮 $q\times q$ 矩陣：

$$y=diag(0,1,2,3,\cdots\cdots,q-1),$$

$$x=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

試驗證〔x, y〕$=x$，於是 x 和 y 生成 $gl(p, \mathbf{F})$ 的 2 維可解子代數。試證 x 和 y 沒有共同固有向量。

4. 當 $p=2$ 時，習題 3.3 證明在質數特徵 p 的體上的自同態組成的可解李代數不一定有冪零導代數（參考定理4.1 的系 3）。對任意 p，考慮系 3 的一個反例如下：如習題 3 取 $L\subset gl(p, \mathbf{F})$。造向量空間的直和 $M=L+\mathbf{F}^p$。令 $\mathbf{F}^p$ 爲 Abel 而 L 有其通常乘法而且在 $\mathbf{F}^p$ 上的作用方式如所給定的，則 M 形成一李代數。試證 M 爲可解，但是它的導代數（$=F_x+F^p$）卻不是冪零。

5. 如果 $x, y\in EndV$ 是可交換，試證 $(x+y)_s=x_s+y_s$，而且 $(x+y)_n=x_n+x_n$。試舉例證明如果 x，y 是不可交換時這可能不成立。〔先證明 x，y 半單（或冪零）導致 $x+y$ 半單(或冪零)。〕

6. 驗證（4.2）的末尾的公式（*）。

7. 試證定理 4.3 的逆定理。

8. 注意，當檢驗定理 4.3（或它的系）的假設時只要檢驗 L 的基底元素 x, y 就足够了。譬如在習題 1.2 中的例子，利用 Cartan 準則證明可解性。

〔附　　註〕

這裏的證明是根據 Serre〔1〕 Chevalley〔1〕，他們是最先在線性代數羣上有系統地利用 Jordan 分解；也參考 Borel〔1〕，在此特別強調加法 JoJdan 分解在李代數中的功用。

5.　Killing 形式

5.1.　半單性的判斷準則

令L爲任意李代數。如果x, $y\in L$，定義

$$\kappa(x. y)=Tr(adx\ ady).$$

則κ爲L上的對稱雙線性形式，稱爲 **Killing 形式**。因爲κ滿足(*) $([xy],z)=\kappa(x,[yz])$ 所以稱κ爲結合的。(*) 是根據(4.3)中的等式: $Tr([x,y]z)=Tr(x[y,z])$ 對有限維向量空間的自同態x, y z，都成立。

以下的引理對以後的討論提供很多方便。

引理。令I爲L的理想。如果κ爲L上的 Killing 形式而κ_I爲I上（看成是李代數）的 Killing 形式，則$\kappa_I=\kappa|_{I\times I}$。

證明。首先我們敍述一個由線性代數而得的簡單事實: 如果W爲（有限維）向量空間V的子空間，而ϕ爲V的自同態將V映至W，則$Tr\phi=Tr(\phi|W)$。（爲明瞭這一點，我們只要把W的基底擴張成V的基底然後再觀察所得的矩陣表現。）現在如果x, $y\in I$則 $(adx)(ady)$ 爲L的自同態，將L映至I，所以它的跡 $\kappa(x,y)$ 與 $(adx)(ady)|_I=(ad_Ix)(ad_Iy)$ 的跡 $\kappa_I(x,y)$ 是一致。

就一般而言，如果一個對稱雙線性形式 $\beta(x,y)$ 的根基$S=\{x\in L|\beta(x,y)=0$ 對一切的 $y\in L\}=0$，我們就說它是非退化。因爲 Killing 形式爲結合的，所以它的根基不僅僅是子空間，S甚而爲L的理想。在線性代數中我們有一個判定非退化性的實用方法如下: 固定L的一組基底$(x_1,\cdots\cdots,x_n)$。則κ爲非退化當且僅當$n\times n$矩陣(a_{ij})，其中$a_{ij}=K(x_i,x_j)$，有非零行列式。

爲了舉例說明，我們利用 $sl(2,\mathbf{F})$ 的標準基底來計算 $sl(2,\mathbf{F})$ 的 Killing 形式。設 (x,h,y) 爲基底的次序，則 adx, adh 及 ady 的矩陣爲

$$adh=diag(2,0,-2),\ adx=\begin{pmatrix}0&-2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$ady=\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\0&2&0\end{pmatrix}。$$

所以 κ 的矩陣爲$\begin{pmatrix}0&0&4\\0&8&0\\4&0&0\end{pmatrix}$，行列式爲$-128$，因而 κ 爲非退化。(只要 $char\,\mathbf{F}\neq 2$，這還是永遠對的。)

記住，如果 $Rad\,L=0$ 我們說一非零李代數 L 爲半單。這等於是要求 L 沒有非零 Abel 理想：實際上，任何這種理想必定在根基中，而且反過來說，根基（如果不是 0）也包含一個這樣的理想（對 L 來說），那就是 $Rad\,L$ 的導來鏈的最後一個非零項（參考習3.1。）

定理　令 L 爲（非零）李代數。則 L 爲半單當且僅當它的Killing 形式 κ 爲非退化。

證明。首先假定 $Rad\,L=0$。令 S 爲 κ 的根基。依定義，$Tr(adx\,ady)=0$ 對一切 $x\in S, y\in L$（特別對 $y\in[SS]$）。根據 Cartan 準則 (4.3)，$ad_L S$ 爲可解，因此 S 爲可解。但是我們在上面已提到 S 爲 L 的理想，所以 $S\subset Rad\,L=0$，因而 κ 爲非退化。

反之，令 $S=0$。爲了要證明 L 爲半單，只要證明 L 的每一個 Abel 理想 I 都是包含在 S 中就可以。假定 $x\in I$，$y\in L$。則 $adx\,ady$ 將 L 映至 I 而且 $(adx\,ady)^2$ 將 L 映至 $[II]=0$。這是說 $adx\,ady$ 爲冪零，因此 $0=Tr\,adx\,ady=\kappa(x,y)$，所以 $I\subset S=0$（這一半的證明在質特徵的情形下還是有效的（習題 6）。）

上面的證明指出我們恒有 $S\subset Rad L$；然而，反方向的包含並不

一定成立（習題 4）。

5.2. L 的單理想

首先給一個定義。如果一個李代數 L 可以寫成 $L=I_1+\cdots\cdots+I_t$（子空間的直和），其中 I_i 是 L 的理想，我們說 L 爲理想 $I_1,\cdots\cdots,I_t$ 的直和。如果 $i\neq j$，這個條件導致 $[I_iI_j]\subset I_i\cap I_j=0$（代數 L 可看成是在李代數 I_i 的向量空間的外直和上定義分量式的李乘積而得的李代數）。我們記 $L=I_1\oplus\cdots\cdots\oplus I_t$。

定理。令 L 爲半單。則存在 L 的理想 $L_1,\cdots\cdots,L_t$，每一個都是單（看成李代數）理想，使得 $L=L_1\oplus\cdots\cdots\oplus L_t$。$L$ 的每一個單理想和 L_i 中的某一個是一致。而且，L_i 的 Killing 形式正是 κ 在 $L_i\times L_i$ 上的限制。

證明。第一步驟，令 I 爲 L 的任意理想。則依 κ 的結合性 $I^\perp=\{x\in L\,|\,K(x,y)=0$ 對一切的 $y\in I\}$ 也是一個理想。將 Carтan 準則應用到李代數 I 上，可證明 L 的理想 $I\cap I^\perp$ 爲可解（因此爲 0）。因爲 $dimI+dimI^\perp=dimL$，所以我們就有 $L=I\oplus I^\perp$。

現在只須要利用數學歸納法就可得我們想要的分解。如果 L 沒有非零眞理想，則 L 爲單代數因此什麼都不必做。否則令 L_1 爲極小非零理想；由前一段知，$L=L_1\oplus L_1^\perp$ 特別，L_1 的任何理想也是 L 的理想，所以 L_1 爲半單（由於 L_1 的極小性故知其爲單）。同樣的理由，$L_1^\perp$ 爲半單；由歸納法假設，它可分解成單理想的和，這些理想也是 L 的理想。因此就得到 L 的分解。

其次我們必須證明這些單理想是唯一的。如果 I 爲 L 的任何單理想，則 $[IL]$ 也是 I 的理想。由 $Z(L)=0$ 知道 $[IL]=I$。他方面 $[IL]=[IL_1]\oplus\cdots\cdots\oplus[IL_t]$，所以只有一個和分量不爲零。設 $[IL_i]=I$。則 $I\subset L_i$ 而且 $I=L_i$（因爲 L_i 是單）。

定理的最後一個主張可由引理 5.1 而得。

系。如果L爲半單，則$L=[LL]$，而且 L 的一切理想和同態像也是半單（或0）。不僅如此，L的每一理想都是L的某些單理想的和。

5.3. 內導子

非退化 Killing 形有一個更重要的結果。在敍述它之前我們先明確地提一提習題 2.1 的結果。adL 爲 $DerL$ 的理想（對任何李代數L），其證明只須要一個簡單的觀察:

(*) $[\delta, adx]=ad(\delta x]$, $x\in L, \delta\in DerL$。

定理。如果L爲半單，則 $adL=Der\,L$（卽L的每一個導子都是內導子）。

證明。因爲L爲半單，所以 $Z(L)=0$，因此，$L\to adL$ 爲李代數的同構。特別，$M=adL$ 本身的 Killing 形式爲非退化（定理 5.1）。如果$D=DerL$，由方才做過的說明知 $[D,M]\subset M$。這就使得 κ_M 成爲D的 Killing 形式 κ_D 在 $M\times M$ 上的限制。特別，如果在D中 $I=M^{\perp}$ 是在 κ_D 下與M正交 κ 的子空間，則 κ_M 的非退化性使 $I\cap M=0$，I和M都是D 的理想，所以我們得 $[I,M]=0$。如果 $\delta\in I$，則 $ad\delta(x)=0$對一切$x\in L$（依(*)）。因爲 ad 爲1-1，所以 $\delta(x)=0$ $(x\in L)$ 因而 $\delta=0$。結論：$I=0$，$DerL=M=adL$。

5.4. 抽象的 Jordan 分解

定理 5.3 能够用來介紹任意半單李代數L中的一個抽象的 Jordan 分解。記住（(4.2) 的引理 2）如果 $\mathscr{A}$ 爲有限維 $\mathbf{F}$ 代數，則 $Der\mathbf{F}$ 的一切元素在 $End\mathscr{A}$ 中的半單部和冪零部都落在 $Der\mathscr{A}$ 中。特

別，因爲 $DerL=adL$ (5.3) 而且 $L\to adL$ 爲 1-1，所以每一個 $x\in L$ 決定唯一元素 s，$n\in L$ 使得 $adx=ads+adn$ 爲 adx （在 $EndL$中）的一般 Jordan 分解。這是說 $x=s+n$，$[s,n]=0$，s 是 ad-半單（即 ads 是半單），n 是 ad 冪零。我們記 $s=x_s$，$n=x_n$，而且（在語言的混用下）稱這兩個分別爲 x 的半單部及冪零部。

當 L 爲線性李代數時，較細心的讀者會認爲所用的記號 y_s，x_n 混淆不清而加以反對。不過在 (6.4) 我們將證明在這一切的情形下剛剛得到的 x 的抽象分解實際上是和一般的 Jordan 分解一致。暫時我們將樂意地指出在特別情形 $L=sl(V)$ （V 爲有限維）時這是對的：在 $EndV$ 中記 $x=x_s+x_n$ （一般的 Jordan 分解），$x\in L$。因爲 x_n 爲冪零自同態，它的跡爲 0 因而 $x_n\in L$。這也使得 x_s 的跡爲 0 所以 $x_s\in L$。不僅如此，$ad_{gl(V)}x_s$ 爲半單（(4.2) 的引理 1），所以 ad_Lx_s 爲半單，同理 ad_Lx_n 爲冪零，而且 $[ad_Lx_s, ad_Lx_n]=ad_L[x_s, x_n]=0$。由於 L 中的抽象 Jordan 分解是唯一，所以 $x=x_s+x_n$ 一定就是它。

習　題

1. 如果 L 爲冪零，試證 L 的 Killing 形式恆爲零。

2. 試證 L 爲可解的充要條件是 $[LL]$ 落在 Killing 形式的根基中。

3. 令 L 爲二維非交換李代數 (1.4)，它是可解。試證 L 的 Killing 形式不等於零。

4. 令 L 爲習題 1.2 的三維可解李代數。試計算它的 Killing 形式的根基。

5. 令 $L=sl(2,\mathbf{F})$。試計算 L 在 Killing 形式下與標準基底對偶的基底。

6. 令 $char\mathbf{F}=p\neq 0$。如果L 的 Killing 形式爲非退化，試證L爲半單。試舉例證明其逆命題不對。〔當 $char\ \mathbf{F}=3$ 時，考慮 $sl(3,\mathbf{F})$ 除以中心而得的代數。〕

7. 關於 $sl(3,\mathbf{F})$ 的標準基底，試計算 K 的行列式。有哪些質數會除盡它?

8，設$L=L_1\oplus\cdots\cdots\oplus L_t$ 爲一半單李代數L的分解，其中 L_i 爲L的單理想。試證明$x\in L$的半單部及冪零部正好分別是其在 L_i 中的分量的半單部及冪零部的和。

附　註

即使是在質特徵的情形下，Killing 形式的非退化性對李代數的結構還是有相當大的影響。參考 Seligmm〔1〕，Pollack〔1〕，Kaplaosky〔1〕。

6.　表現的完全可約性

在這一節中，除非提到其他的特別情形，否則一切的表現都是有限的。

我們將利用正則表現（參考第八節）來探討半單李代數。結果將發現 L 是由 $sl(2,\mathbf{F})$ 的一些複形造起來的；爲了要探討這三維子代數的正則表現，我們需要有關 $sl(2,\mathbf{F})$ 的表現的正確資料，這些資料將出現在以下的第七節。首先，我們證明關於任意半單李代數表現的一個相當重要的一般定理（Weyl 定理）。

6.1.　模

令L爲一李代數。爲了方便我們常常喜歡同時用模和表現的兩種語言。正如其他的代數理論一樣，我們有一個自然的定義。一向量空間如果具有一運算$L\times V\rightarrow V$（記爲$(x,v)\longrightarrow x.v$ 或 xv）而且滿

足以下的等式:

(M1) $(ax+by).v=a(x.v)+b(y.v)$,

(M2) $x.(av+bw)=a(x.v)+b(x.w)$,

(M3) $[xy].v=x.y.v-y.x.v.(x, y\in L, v, w\in V; a, b\in \mathbf{F})$

時則稱爲 **L-模**。譬如，如果 $\phi: L\to gl(V)$ 爲 L 的一個表現，那麼經由 $x\cdot v=\phi(x)(v)$，V 就可以看成是一個 L-模。反之，給定一個 L-模 V，這個等式就定義一個表現 $\phi: L\to gl(V)$

如果一線性映射 $\phi: V\to W$ 滿足 $\phi(x.v)=x.\phi(v)$ 則稱 ϕ 爲一模同態。這一同態的核卽爲 V 的子 L-模（而且,標準的同態定理都可以在毫無困難的下情形證明成立）。當 ϕ 正好是向量空間的同構時，我們就稱它爲 L-模的同構；在這一情形下，我們說兩個模所引起的表現是等價。如果 L-模 V 除 0 及其本身之外再沒有其他的子模時，我們就稱 V 爲**旣約模**，特別，我們不把零維模看成是 L 的旣約模。然而我們承認一維 L-模爲旣約模。如果 V 爲一些旣約子模的直和，或者說（等價的看法（習題2）），V 的每一個子模都有一個**補餘模** W'（卽滿足 $V=W\oplus W'$）。如果 W, W' 爲任意的 L-模，我們當然能用顯然的方式將他們的直和 $W\oplus W'$ 變成是 L-模，這方式是定義 $x.(w, w')=(x.w, x.w')$。這些概念都是標準概念，卽使 $dimV=\infty$ 的情形下也是有意義的。當然，名詞 **旣約** 和 **完全可約** 也可同時應用到 L 的表現上。

設 $\phi: L\to gl(V)$ 爲一表現，則在 $EndV$ 中由 $\phi(L)$ 和 1 生成的結合代數和 L 都有相同的不變子空間。因此，在結合環上的模的一般結果（如Jordan-Hölder 定理）對於 L 來說也能成立。爲了以後的用途，我們提一個衆所週知的 **Schur 引理**。

Schur 引理。設 $\phi: L\to gl(V)$ 是不可約。那麼跟每個線性映射

$\phi(x)(x\in L)$ 都交換的線性映射一定是純量的。

對於正則表現來說 L 本身是一個模。子 L-模正好是理想，所以一個單代數如視爲 L-模時是既約的，而半單代數是完全可約的（定理 5.2）。

爲了以後的用途，我們列舉幾個由已知模造新模的方法。令 V 爲 L-模。如果我們定義

$$(x.f)(v)=-f(x.v),\ f\in V^*,\ v\in V \text{ 以及 } x\in L$$

則 V^* 也是一個 L 模（稱爲對偶或逆步）。公設 $(LM1)$, $(M2)$ 顯然是滿足的，所以我們只要驗 $(M3)$:

$$\begin{aligned}([xy].f)(v)&=-f([xy].v)\\&=-f(x.y.v-y.x.v)\\&=-f(x.y.v)+f(y.x.v)\\&=(x.f)(y.v)-(y.f)(x.v)\\&=-(y.x.f)(v)+(x.y.f)(v)\\&=((x.y.y.x).f)(v).\end{aligned}$$

如果 V, W 是 L 模，令 $V\otimes W$ 是 V 跟 W 在 $\mathbf{F}$ 上的張量積。如果 $(v_1,\cdots v_m)$ 跟 $(w_1,\cdots,w_n)$ 分別是 V 跟 W 的基底，那麼 $v_i\otimes w_j$, $i=1,2,\cdots,m$, $j=1,\cdots,n$，是 $V\otimes W$ 的基底。讀者也許知道如何在兩個羣 G 模的張量積上賦予模結構，在生成元 $v\otimes w$ 之上我們定義 $g.(v\otimes w)=g.v\otimes g.w$。對於李代數來說，正確的定義是得自「微分」：

$$x.(v\otimes w)=x.v\otimes w+v\otimes x.w$$

如前，$(M3)$ 是須要加以驗證:

$$\begin{aligned}[xy].(v\otimes w)&=[xy].v\otimes w+v\otimes[xy].w\\&=(x.y.v-y.x.v)\otimes w+v\otimes(x.y.w\\&\quad -y.x.w)\\&=(x.y.v\otimes w+v\otimes x.y.w)-(y.x.v\end{aligned}$$

$$\otimes w+v\otimes y.x.w)$$
$$=x.y.(v\otimes w)-y.x.(v\otimes w)。$$

設V爲佈於 **F** 上的向量空間，那麼就有一標準（而且也很有用）的同構：$V^*\otimes V\longrightarrow EndV$，其對應方法是將一典型的生成元 $f\otimes v$ ($f\in V^*, v\in V$) 對應到自同態 f_v，其中 $f_v(w)=f(w)v$ ($w\in W$)。照慣例，我們利用對偶基底證明這確實建立一個蓋形同態 $V^*\otimes V\longrightarrow EndV$；因爲兩邊的維數都是 $n^2(n=dimV)$，所以這必定也是同構。

現在如果V（因而 V^*）也是 L-模時，那麼如上所述，$V^*\otimes V$ 也是L-模。所以經由上述的同構 $End\,V$ 也可以看成是 L-模。L 在 $EudV$ 上的作用也可以直接描述如下：

$$(x.f)(v)=x.f(v)-f(x.v),\ x\in L,\ f\in EndV,$$
$$v\in V\text{（試證明之）}.$$

更一般的情形，如果V跟W是L模，那麼 L 在空間 $Hom(V,W)$ 有自然作用（這作用是由 $Hom(V,W)$跟 $V^*\otimes W$ 之間的同構引出的)：$(x.f)(v)=x.f(v)-f(x.v)$，$f\in Hom(V,W)$ 爲線性映射，$x\in L$，$v\in V$。

6.2. 表現的 Casimir 算子

在第五節中，我們利用 Cartan 的可解性的判斷準則證明一半單李代數有非退化的 **Killing 形式**。更一般地，設 L 爲半單而且 ϕ：$L\to gl(V)$ 爲 L 的**信實表現**。定義一對稱雙線性形式 $\beta(x.y)=Tr(\phi(x)\phi(y)),(x,y\in L)$。由 (4.3) 中的等式 (*)我們知$\beta$爲結合的，因而$\beta$的根基爲$L$的理想。不僅如此，$\beta$乃是非退化：事實上，定理 4.3 證明 $\phi(S)\cong S$是可解，所以 $S=0$。(Killing 形式只是β的一個特例，取$\phi=ad$ 。)

現在設L 爲半單，β 爲 L 上的非退化，對稱，結合的雙線性形

式。如果 $(x_1, \cdots\cdots, x_n)$ 是L的基底，那麼就存在關於β的唯一對偶基底 $(y_1, \cdots\cdots, y_n)$ 滿足 $\beta(v_i, y_j)=\delta_{ij}$。如果$x\in L$ 我們能夠記 $[x, x_i]=\sum_j a_{ij}x$ 以及 $[xy_i]=\sum b_{ij}y_j$ 利用 β 的結合性，我們計算如下：

$$a_{ik}=\sum_j a_{ij}\beta(x_jy_k)=\beta([x, x_i], y_k)=\beta(-[x_ix], y_k)$$
$$=\beta(x_i, -[xy_k])=-\sum_i b_{kj}\beta(x_i, y_j)=-b_{ki}\text{。}$$

如果$\phi: L\rightarrow gl(V)$ 是L的任意表現，那麼記 $c_\phi(\beta)=\sum_i\phi(x_i)\phi(y_i)\in EndV$ （x_i, y_i 如上是關於β的對偶基底)。利用 $EndV$ 中的恆等式 $[x, yz]=[xy]z+y[xz]$ 和 $a_{ik}=-b_{ki}$ 我們得：$[\phi(x)c_\phi(\beta)]=\sum_i[\phi(x), \phi(x_i)]\phi(y_i)+\sum_i\phi(x_i)[\phi(x), \phi(y_i)]=\sum_{i,j}a_{ij}\phi(x_j)\phi(y_i)+\sum_{ij}\phi(x_i)\phi(y_j)=0$。換言之，$c_\phi(\beta)$ 是在 $EndV$ 中跟 $\phi(L)$ 交換的元素。

總而言之，設$\phi: L\longrightarrow gl(V)$ 是L的信實表現，則此表現的跡形$\beta(x. y)=Tr(\phi(x)\phi(y))$ 是非退化的。如果 $(x_1\cdots\cdots, x_n)$ 是L的一組基底，我們將 $c_\phi(\beta)$ 簡記為 c_ϕ 稱為ϕ的 **Casimir 算子**。c_ϕ 的跡為 $\sum_i Tr(\phi(x_i)\phi(y_i))=\sum_i\beta(x_i, y_i)=dim\,L\neq 0$。一旦 ϕ 是既約時，則由 **Schur 引理** (6.1) 知 c_ϕ 是純量（等於 $dimL/dimV$)；在此情形下，我們得知 c_ϕ 是跟L的基底的選擇無關。

範例。$L=sl(2. \mathbf{F})V=\mathbf{F}^2$，$\phi$為么射$L\rightarrow gl(V)$。令 (x, h, y) 是L的標準基底 (2.1)。易得關於跡形的對偶基底是 $(y, 1/2h, x)$ 所以 $c_\phi=xy+(1/2)h^2+yx=\begin{pmatrix}3/2 & 0\\ 0 & 3/2\end{pmatrix}$。注意，$3/2=dimL/dimV$。

一旦ϕ不再是信實表現時，則上面的做法需要做一些修正。$Ker\phi$ 是L的理想，因而是某些單理想的直和（系 5.2）。令 L' 是其餘單理想的和（定理 5·2）。那麼 $\phi|L'$ 是 L' 的信實表現，這一來前面

的做法還是有效的（利用 L' 的對偶基）；由此而得的自同態 $\in End\ V$ 還是叫做 ϕ 的 Casimir 算子並記作 c_ϕ。顯然，c_ϕ 和 $\phi(L)=\phi(L')$ 可交換，等等。

最後給一個註解：假定我們所要處理的表現都是信實表現常常是很方便的。這等於是研討 L 的某些（半單）理想。如果 L 是單代數，則只有一維模（L 在其上的作用是自明的）或者模 0 不是信實的。

6.3. Weyl 定理

引理。令 $\phi: L\to gl(V)$ 是一半單李代數 L 的表現。那麼 $\phi(L)\subseteq sl(V)$。特別，L 在任意的一維 L 模上的作用是自明的。

證明：試利用 $L=[LL]$ (5.2) 以及 $sl(V)$ 是 $gl(V)$ 的導代數的兩個事實。

定理（**Weyl**）。令 $\phi: L\to gl(V)$ 是半單李代數 L 的有限維表現，$V\neq 0$，那麼 ϕ 是完全可約。

證明：我們先考慮特別的情形：V 有一子 L-模 W 使得 $dimV/W=1$。因爲 L 在 V/W 上的作用是自明（引理），我們在不誤導讀者之下，不妨把 V/W 記作 $\mathbf{F}$: $0\to W\to V\to \mathbf{F}\to 0$; 因而是恰切的。對 $dimW$ 做歸納，我們能夠將 W 化成是不可約的情形。做法如下。令 W' 是 W 的一個非零子模。這就得一恰切序列：$0\to W/W'\to V/W'\to \mathbf{F}\to 0$。利用歸納法假設知此序列是分裂的。即在 V/W' 中存在一個一維子模（就叫做 $\tilde{W}/W'$）使得 $V/W'=W/W'\oplus\tilde{W}/W'$。所以我們得另一恰切序列：$0\to W'\to\tilde{W}\to \mathbf{F}\to 0$。這與前者一樣只是 $dimW'<dimW$，所以利用歸納法得知 $\tilde{W}$ 中有一個一維子模 X 使得 $\tilde{W}=W'\oplus X$。但是 $V/W'=W/W'\oplus\tilde{W}/W'$。所以 $W\cap X=0$ 又 $dimV=dimW+dimX$ 因而 $V=W\oplus X$。

現在我們可以假定 W 是不可約。（我們也可在不失其一般性之下

假定L在V上的作用是信實的。）令 $c=c_\phi$ 是 ϕ 的 Casimir 算子(6.2)。因爲c跟$\phi(L)$是可交換，所以c實實在在是V的L自同態，特別，$c(W)\subset W$ 而且 $Ker\, c$ 是V的一個子L-模。因爲L在 V/W 上的作用是自明（即 $\phi(L)$ 把V送至W），所以c也是有同樣的作用（因爲c是元素 $\phi(x)$ 的乘積的線性組合）。所以c在V/W上的跡是0。另一方面，c在不可約子 L 模W上的作用是純量乘積（**Schur 引理**）；這純量不能等於0，否則，$Tr_V(c)=0$ 因而與 (6.2) 不一致。所以 $Ker\, c$ 是V的一維子L模而且 $Ker\, c\cap W=0$。這是W的理想補餘模。

現在我們考慮一般情形。假定W是V的任意子模：$0\to W\to V\to V/W\to 0$，令 $Hom(V,W)$ 是由一切線性映射$V\to W$所組成的空間，由 (6.1) 知其是 L-模。令 $\mathscr{V}=\{f\in Hom(V,W)\mid f|_W=aI_W\}$，則$\mathscr{V}$是子$L$模：如果 $f|_W=a.I_W$ 那麼對 $x\in L, w\in W, (x.f)(w)=x.f(w)-f(x.w)=a(x.w)-a(x.w)=0$，所以 $x.f|_W=0$。令 $\mathscr{W}=\{f\in\mathscr{V}\mid f|_W=0\}$。前面的計算也證明$\mathscr{W}$是一個子$L$模而且$L$把 $\mathscr{V}$ 映至 $\mathscr{W}$。不僅如此，由於 $f\in\mathscr{V}$ 是由純量 $f|_W$ 所決定$(mod\mathscr{W})$，所以 $dim\mathscr{V}/\mathscr{W}=1$。這正是前面所處理過的特殊情形 $0\to\mathscr{W}\to\mathscr{V}\to\mathscr{V}/\mathscr{W}\to 0$。根據第一部分的證明，$\mathscr{V}$ 有一個一維子模跟 $\mathscr{W}$ 互補。令$f: V\to W$生成此一維模，所以在乘以適當的一個非零純量我們可以假定 $f|_W=1_W$。我們說 $x.f=0$的意思是說 $0=x.f(v)=x.f(v)-f(x.v)$，即 f 是 L 同態。所以 $Kerf$ 是 V 的子 L 模。因爲f把V 映至W而且 $f|_W=I_W$，所以 $V=W\oplus Kerf$ 而定理得證。

6.4.　Jordan 分解的保存

對於研究半單李代數的表現來說，**Weyl 定理**當然是一個基礎的

工具。在此我們先提一個立即的應用，那就是證明在L的不同線性表現裏，抽象的 Jordan 分解和一般的 Jordan 分解是一致。

定理 設 $L\subset gl(V)$ 是一個半單線性李代數（V 有限維）。那麼 L 包含它的一切元素在 $gl(V)$ 中的半單部及冪零部。特別，L 的抽象 Jordan 分解和一般 Jordan 分解是一致的。

證明: 因爲不論那一類型的分解都是唯一（4.2, 5.4），所以後者主張可由前者主張證明之。

令$x\in L$是任意的，而$x=x_n+x_s$是其在 $gl(V)$ 中的 **Jordaan 分解**。問題是如何證明 $x_n, x_s\in L$。因爲 $ad\ x(L)\subset L$，所以由命題 4.2(c) 知 $ad x_s(L)\subset L$ 以及 $ad x_n(L)\subset L$，在此 $ad=ad_{gl(V)}$。換句話說， $x_s, x_n\in N_{gl(V)}(L)=N, N$ 是 $gl(V)$ 的子代數而且$L\subseteq N$是一理想。如果我們得以證明$N=L$那就好了，可惜這是不可能的事，因爲$L\subset sl(V)$（引理 6.3），因而純量乘法的映射雖落在N中卻不可能落在 L 中。所以我們必須找到一個會包含 x_s, x_n 而且比N小的子代數使得我們能够證明它是等於L。如果W是 V 的子L-模，定義 $L_W=\{y\in gl(V)\mid y(W)\subset W$ 而且 $Tr(y|_W)=0\}$。譬如，$L_V=sl(V)$。因爲$L=[LL]$，所以L顯然是落在所有這樣的 L_W 中。置 $L^*=(\bigcap_w L_W)\cap N$。顯然，$L^*$ 是N的子代數，而且 $L\subseteq L^*$ 是一理想（L^* 確實排除純量映射）。不僅如此，如果$x\in L$，那麼，$x_n, x_s\in L_W$ 因而 $x_n, x_s\in L^*$

現在只須證明$L=L^*$。L^* 是 L 的有限維 L 模，由 **Weyl 定理** (6.3) 知 L^* 是可以寫成L和 L^* 的某一子模M的直和: $L^*=L+M$ 但是 $[L, L^*]\subset L$（因爲 $L^*\subset N$），所以 $[L, M]=0$。令W是V的任何既約子 L模。如果 $y\in M$，那麼 $[L, y]=0$，所以由 **Schur 引理**知 $y|_W=\lambda I$。他方面，$Tr(y|_W)=0$因爲$y\in L_W$。因此 $y|_W=0$。由 **Weyl 定理**知V 可以寫成既約子L-模的直和，所以$y=0$。

這是說$M=0$，$L=L^*$。

系　令L是半單李代數，$\phi: L\to gl(V)$ 是L的有限維表現。如果$x=s+n$是x的抽象 **Jordan** 分解，那麼$\phi(x)=\phi(s)+\phi(n)$是$\phi(x)$的一般 **Jordan** 分解。

證明: 因為L是由$ad s$的固有向量生成的，所以$\phi(L)$是由$ad_{\phi(L)}\phi(s)$的固有向量生成的，因此$ad_{\phi(L)}\phi(s)$是半單。同理$ad_{\phi(L)}\phi(n)$是冪零，而且$[ad_{\phi(L)}\phi(s), ad_{\phi(L)}\phi(n)]=0$ 根據 (5.4) 知$\phi(x)=\phi(s)+\phi(n)$是$\phi(x)$的抽象 Jorden 分解。應用定理因而得證。

習　題

1. 利用 $L=sl(2,\mathbf{F})$ 的標準基底，試寫下 L 的正則表現的 Casimir 算子（參考習 5.5）。同樣地，試寫下 $sl(3,\mathbf{F})$ 的三維自然表現的 Casimir 算子，不過先計算關於跡形的對偶基底。

2. 令V是一個L模。試證V是既約子模的直和的充要條件是V的每一個子模都具有一個補餘模。

3. 如果L是可解，那麼L的每一個既約表現都是一維的。

4. 試利用 Weyl 定理證明當L是半單時，$adL=DerL$（定理 5.3）。〔如果$\delta\in DerL$，利用法則 $x.(a.y)=(0, a\delta(x)+[xy])$，定義直和 $\mathbf{F}+L$ 成為L模。接着考慮子模L的補餘模。〕

5. 對於一個李代數L來說，如果 $RadL=Z(L)$，那麼L就叫做縮減的。（譬如：取L是$Abel$，或是半單，或者是 $gl(n,\mathbf{F})$）(a) 如果L是縮減的，那麼L是完全可約adL模。〔如$adL\neq 0$，則可用Weyl 定理〕特別，L是$Z(L)$和$[LL]$的直和，在此$[LL]=0$或是半單。

(b) 如果L是一古典線性李代數 (1.2)，那麼L是半單。（試利

用 (a) 及習題 1.9, 4.1)

(c) 如果L是完全可約 adL 模，那麼L是縮減的。

(d) 設L是縮減的而且$\phi: L\to gl(V)$ 是L的有限維表現。如果$\phi(L)$ 是半單自同態，那麼L是完全可約。

6. 令L是單李代數。令 $\beta(x, y)$ 和 $\gamma(x, \beta)$ 是 L 上的兩個對稱，結合的雙線性形式。如果β, γ是非退化的，那麼$\beta=a.\gamma$。〔β引出一個同構: $L\to L^*$，而且γ引出一個同構: $L^*\to L$。這兩個同構的合成成爲一個 L 模同構。但是L是一個旣約 L 模，所以可利用 Schur 引理。〕

7. 在以後將看到 $s(n, \mathbf{F})$ 其實是單代數。假定這一點而且利用習題 6，試證 $sl(n, \mathbf{F})$ 上的 Killing 形式和一般跡形的關係是 $\kappa(x. y)=2nTr(xy)$。

8. 如果L是一個李代數，那麼經由 ad 的作用，$(L\otimes L^*)$ 可以看成是L模。$(L\otimes L^*)$ 也可以看成是 L上的雙線性形式全體形成的空間。試證β是結合的充要條件是 $L.\beta=0$

附　註

Weyl 定理的證明是取自 Serre〔1〕。原始的證明跟現在的證明是非常的不同，它是利用緊緻李羣上的積分，參考 Freudenthal de Vries〔1〕。至於定理 6.4 是根據 Bourbaki〔1〕。

sl(2, F) 的表現

在這一節（如第六節）中，一切的模都是佈於 $\mathbf{F}$ 上的有限維空間，L代表 $sl(2\mathbf{F})$，其標準基底是由

$$x=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0\\0&-0\end{pmatrix}$$

組成的（例 2.1）。於是 $[hx]=2x, [hy]=2y, [xy]=h$。

7.1. 權與極大向量

V 是任意的 L 模。因爲 h 是半單，系 6.4 告訴我們 h 在 V 上的作用是對角的。（由於 $\mathbf{F}$ 的代數封閉性我們保證每一個半單自同態都可以對角化。）因而得以將 V 分解成固有空間 $V_\lambda=\{v\in V|h.v=\lambda v\}$，$\lambda\in\mathbf{F}$，的直和。當然，即使 λ 不是 h 在 V 上作用時的固有值，V_λ 還是有意義的而且就是 0。一旦 $V_\lambda\neq 0$，我們稱 λ 是 h 在 V 中的一個權而且稱 V_λ 是一個權空間。

引理 如果 $v\in V_\lambda$，那麼 $x.v\in V_{\lambda+2}$ 而且 $y.v\in V_{\lambda-2}$。

證明 $h.(x.v)=[h,x].v+x.h.v=2x.v+\lambda x.v=(\lambda+2)x.v$，同樣地，也可以得 $h.(y.v)=(\lambda-2)y.v$。

【註】由此引理可導出 x y，在 V 上的表現是得冪零自同態；不過這件事實也可由定理 6.4 證得。

因爲 $dimV<\infty$，而且 $V=\coprod_{\lambda\in F}V_\lambda$ 是一直和，所以必存在 $V_\lambda\neq 0$ 使得 $V_{\lambda+2}=0$。（由引理知，對任意 $v\in V_\lambda, x.v=0$。）對於這種 λ，V_λ 中任何非零向量都叫做權 λ 的極大向量。

7.2. 既約模的分類

現在假定 V 是既約 L-模。選取一極大向量，就說是 $v_0\in V_\lambda$，置 $v_{-1}=0, v_i=(1/i!)y^iv_0(i\geq 0)$。

引理 (a) $h.v_i=(\lambda-2_i)v_i$,

(b) $y.v_i=(i+1)v_{i+1}$,

(c) $x.v_i=(\lambda-i+1)v_{i-1}(i\geq 0)$。

證明 (a) 經由引理 7.1 的重覆應用即得，然而 (b) 只是定義

而已。至於（c）的證明可用數學歸納法，$i=0$ 時是顯然的（因爲 $v_{-1}=0$）。其次，如果 $i>0$ 時，

$$
\begin{aligned}
ix.v_i &= x.y.v_{i-1} \qquad \text{（定義）}\\
&= [x,y].v_{i-1}+y.x.v_{i-1}\\
&= h.v_{\lambda+1}+y.x.v_{i-1}\\
&= (\lambda-2(i-1))v_{i-1}+(\lambda-i+2)y.v_{i-2}\\
&\qquad\qquad \text{（(a) 和數學歸納法假設）}\\
&= (\lambda-2i+2)v_{i-1}+(i-1)(\lambda-i+2)v_{i-1} \qquad \text{(b)}\\
&= i(\lambda-i+1)v_{i-1}\ 。
\end{aligned}
$$

於是只要兩邊都除以 i 就得證。

由公式（a）知所有的 $v_i\neq 0$ 都是線性獨立。但是 $dimV>\infty$。令 m 是一個最小正整數使得 $v_m\neq 0, v_{m+1}=0$，顯然對一切 $i>0$。$v_{m+i}=0$。由公式（a),(b) 及（c）知以（$v_0, v_1, \cdots\cdots, v_m$）爲基底的子空間是 V 的一個非零子 L 模。因爲 V 是既約的所以此子空間必定是 V 本身。不僅如此，關於此有序基底 $(v_0, v_1\cdots\cdots, v_m)$，我們可以明確地寫出 x，y，h 所表現的自同態的矩陣表現；由 h 可得一對角矩陣，然而由 x 和 y 可分別得上及下三角冪零矩陣。

如再仔細地觀察公式（c）就會看到一個觸目的事實：當 $i=m+1$ 時，左端 $=0$，然而右端是 $(\lambda-m)v_m$。因爲 $v_m\neq 0$，故可結論 $\lambda=m$。換句話說，一個極大向量的權是一非負整數（比 $dimV$ 小 1）。我們稱它是 V 的**最高權**。不僅如此，由公式 (a) 知每一個權僅出現一次（即如果 $V_\mu\neq 0, dimV_\mu=1$）；特別，λ 是唯一地決定於 $V(\lambda=dimV-1)$，所以在 V 中的極大向量 v_0 僅可能是一個（如不計其純量倍數）。總結以上的討論我們得:

定理　令 V 是 $L=sl(2,\mathbf{F})$ 的既約模。

(a) 對於 h 來說，V 是權空間 V_μ, $\mu=m, m-2, \cdots\cdots, -(m-$

2), $-m$，的直和，在此$m+1=dimV$ 而且 $dimV_\mu=1$。

(b) V有唯一的極大向量（如不計其純量倍數），其權（叫做V的最高權）是m。

(c) 如果V的基底選爲上述的形式，那麼L在V上的作用正如上面公式所示。特別，對於每一個正整數$m+1$，至多只可能存在一個$m+1$維的既約L模（當然同構者除外）。

系　令V是任意有限維L模，$L=sl(2,\mathbf{F})$ 那麼h在V上的固有值都是整數，而且都是正負同時出現（次數也是相同）。不僅如此，在V的任意完全可約分解（即將V寫成其既約子模的直和），那麼其既約子模的總個數是 $dimV_0+dimV_1$。

證明　如果$V=0$，則沒有什麼可以證的。否則可利用 Weyl 定理 (6.3) 將V寫成既約子模的直和。對於既約子模來說，上面的定理已述說得很清楚，所以第一個主張是很明顯的。至於第二個主張，我們只要觀察每一個既約L模至多只有一個 0 權或一個 1 權出現，但不是兩者都出現。

如果只是爲了這一章的討論，那麼上面的定理和系就很足够了。然而，在沒有調查 $sl(2,\mathbf{F})$ 是否對於每一可能最高權 $m=0\,1,2,\cdots$ 都有既約模就撇開此主題似乎是不太合理的。當然，在低維數的情形下，我們已知如何去建造適當的模：1 維的自明模，2 維的自然模以及 3 維的正則表現。對於任意 $m\geq 0$，引理 7.2 的公式 (a)—(c) 就可以用來定義L的$m+1$維既約模其基底是 $(v_0,v_1,\cdots\cdots,v_m)$，並且記爲 $V(m)$。像往常一樣，簡單的證明工作留給讀做習題（習題 3）。（至於一般的存在定理可參考(20.3)。）

另一個更深一層面的觀察：如果我們利用 (2.3) 中指數的討論，那麼 $V(m)$ 的結構的對稱性可以看得更清楚。令$\phi: L\rightarrow gl(V(m))$ 是屬於最高權的既約表現。那麼由的公式知 $\phi(x),\phi(y)$ 是冪零自同

形，所以我們可以定義 $V(m)$ 的一個自同構爲 $\tau = exp\,\phi(x)exp\,\phi(-y)exp\,\phi(x)$。我們可以同時假定 $m>0$，所以表現 ϕ 是信實的（L 是單代數）。在 (2.3) 中的討論知 $\tau\phi(h)\tau^{-1}=exp(ad\,\phi(x))exp(ad\phi(-y))exp(ad\phi(x))(\phi(h))$。但是 $\phi(L)$ 與 L 是同構，所以我們能做跟 (2.3) 一般的計算。結論：$\tau\phi(h)\tau^{-1}=-\phi(h)$ 或者 $\tau\phi(h)=-\phi(h)\tau$。由此即知 τ 把屬於權 $m-2i$ 的基底向量 v_i 送至屬於權 $-(m-2i)$ 的基底向量 v_{m-i}。((2.3)中的討論是限制於 $m=1$ 的特別情形。）更一般地，如果 V 是任意有限維 L-模，那麼 τ 將正權空間和負權空間互換。

習　題

（在這些習題中，$L=sl(2,\mathbf{F})$）

1. 試利用 *Lie* 定理證明任意有限維 L 模都有一個極大向量〔試觀察由 h 和 x 生成的子代數。〕

2. $M=sl(3,\mathbf{F})$ 在其左上端 2×2 的位置上包含一個與 L 同構的子代數。試分解 M 爲其既約子模的直和（M 經由正則表現看成是 L 模）：$V(0)\oplus V(1)\oplus V(1)\oplus V(2)$。

3. 試證引理 7.2 的公式 (a)—(c) 確實定義 L 的一個既約表現。（爲了證明他們能定義一個表現，只要證明對應於 x，y，h 的矩陣滿足與 x，y，h 相同的結構等式。〕

4. 屬於最高權 m 的既約 L 模也能够用以下的方法自然地造出：令 X,Y 是 L 的自然模 $\mathbf{F}^2$ 的基底。令 $\mathscr{R}=\mathscr{F}[X,Y]$ 是兩個變數的多項式代數，利用導數的規則將 L 的作用擴張至 $\mathscr{R}$ 上：$z.fg=(z.f)g+f(z.g)$，$z\in L$，f，$g\in\mathscr{R}$。試證這個擴張是有意義的而且 $\mathscr{R}$ 變成是一個 L 模。接着試證以 $X^m, X^{m-1}Y, \cdots\cdots, XY^{m-1}, Y^m$ 爲基底的 m 次齊次多項式子空間在 L 的作用下保持不變而且是既約，它是屬

於最高權m。

5. 假定 $char\ \mathbf{F}=p>0$, $L=sl(2,\mathbf{F})$。試證習題3或4中所造的 L-模 $V(m)$ 只要它的最高權 $m<p$，那麼 $V(m)$ 是既約L模，如果$m=p$，那麼 $V(m)$ 是可約L模。

6. 試分解兩個L-模 $V(3)$ 和 $V(7)$ 的張量積成爲既約子模的直和。$V(4)\oplus V(6)\oplus V(8)\oplus V(10)$。試發展出$V(m)\otimes V(n)$ 的一般分解公式。

7. 在這習題裏，我們造一些無限維的L-模。令 $\lambda\in\mathbf{F}$ 爲任意純量。令 $Z(\lambda)$ 是佈於 $\mathbf{F}$ 上 $(v_0, v_1, \cdots\cdots,\ )$ 爲基底的無限維向量空間。

(a) 試證引理 7.2 的公式 (a)—(c) 在 $Z(\lambda)$ 上定義一個 L 模結構，而且 $Z(\lambda)$ 的每一個子L模至少包含一個極大向量。

(b) 假定 $\lambda+1=i$ 是非負整數。試證 v_i 是極大向量（譬如，$\lambda=-1$，$i=0$）。這會引出一個L模同態 $Z(\mu)\longrightarrow Z(\lambda)$, $\mu=\lambda-2i$，將 v_0 送至 v_i。試證ϕ是一個嵌形而且 $Im\phi$, $Z(\lambda)/Im\phi$ 兩者都是既約L-模（但是當 $i>0$時，$Z(\lambda)$ 不是完全可約的）。

假定 $\lambda+1$ 不是一個非負整數。試證 $Z(\lambda)$ 是既約。

8. 根空間分解

在這一整節裏，L表示一個半單李代數。我們將藉正則表現詳細地研究L的結構。我們的主要工具是 Killing 形式和定理 6.4, 7.2（這兩個定理主要是依賴 Weyl 定理的應用而得的結果。）讀者應該記住一件事，那就是 $sl(2,\mathbf{F})$（或更一般的，$sl(n,\mathbf{F})$）將會指引我們看出一般端倪。

8.1. 極大環面子代數與根

如果L是完全由冪零元（即 ad 冪零元）組成，那麼 L 就會是冪零（Engel 定理）。這是不可能的情形因爲L是半單的，所以我們能够找到一個x它在抽象的 Jordan 分解下的半單部 x_s 是不等於零。這就證明L包含一個由半單元素組成的非零子代數（譬如，由 x_s 生成的子代數就是）。這樣的子代數叫做環面子代數。以下的引理，粗略地說起來是類似 Engel 定理的。

引理　L的環面子代數是可換的。

證明　設T是環面子代數。對T中一切的x，我們須證明 $ad_T x = 0$。因爲 $ad x$ 是可對角化（$ad x$ 是半單而且$\mathbf{F}$ 是代數封閉），所以我們只要證明 $ad_T x$ 沒有非零的固有值。假定不然，那麼一定存在 $y(\neq 0)\in L$ 使得 $[xy]=ay(a\neq 0)$。於是 $ad_T y(x)=-ay$ 也是 $ad_T y$ 的一個固有向量其所屬固有值是0。他方面，我們能够將x寫成 $ad_T y$ 的固有向量的線性組合（y 也是半單），如將 $ad_T y$ 應用到 x 之後，如果還有剩下的項，那一定是屬於非零固有值的固有向量。這就和前面的結論不一致。

現在固定L的一個極大環面子代數H，即一個環面子代數它不會再包含於另一個不相同的環面子代數。（用記號H代替T是顯得較不自然，不過H 是比較具有傳統性。）譬如，如果 $L=sl(n,\mathbf{F})$，易證明（習題1）H是跡爲零的對角矩陣的全集合。

因爲H是可換的（利用以上的引理），$ad_L H$ 是L的一些可換的半單自同態的集合。根據線性代數的一個標準結果 $ad_L H$ 是可以同時對角化。換句話說，L是子空間 $L_\alpha=\{x\in L\mid[hx]=\alpha(h)x, \forall h\in H\}$ 的直和，其中α取盡 H^* 的元素。注意，L_0 就是 $C_L(H)$, H 的中心化子；由引理知 $L_0\supset H$。令$\Phi=\{0\neq\alpha\in H^*\mid L_\alpha\neq 0\}$；稱$\Phi$的元素是$L$關於$H$的根（當然$\Phi$是有限的）。一旦採用這樣的記號，我們就有一個根空間分解（或 Cardan 分解）：

$$(*)\qquad L=C_L(H)+\coprod_{\alpha\in\Phi}L_\alpha\ .$$

譬如取 $L=sl(n,\mathbf{F})$ 時，讀者將會看出 (*) 對應着 L 關於標準基底的分解 (1.2)。我們的目標是先證明 $H=C_L(H)$，然後更詳盡地描述根集合，最後證明Φ完完全全地把 L 刻劃出來。

一開始我們先觀察一些有關根空間分解的簡單結果。

命題　對一切 $\alpha,\beta\in H^*$, $[L_\alpha,L_\beta]\subset L_{\alpha+\beta}$。如果 $x\in L_\alpha,\alpha\neq 0$，那麼 $ad\,x$ 是冪零。如果 $\alpha,\beta\in H^*$ 而且 $\alpha+\beta\neq 0$，那麼關於 L 的 Killing 形式 κ, L_α 和 L_β 是正交。

證明　第一個主張可由 Jacobi 恆等式證得: $x\in L_\alpha$, $y\in L_\beta$, $h\in H$ 那麼 $adh([xy])=[[hx]y]+[x[hy]]=\alpha(h)[xy]+\beta(h)[xy]=(\alpha+\beta)(h)[xy]$。由第一個主張即得第二個主張。

至於最後的主張，由假設可求得 $h\in H$ 使得 $(\alpha+\beta)(h)\neq 0$。於是如果 $x\in L_\alpha$, $y\in L_\beta$，那麼由於 κ 是結合所以 $\kappa([hx],y)=-\kappa([xh],y)=-\kappa(x,[hy])$，或者 $\alpha(h)\kappa(x.\ y)=-\beta(h)\kappa(x.\ y)$，或者 $(\alpha+\beta)(h)\kappa(x.\ y)=0$。這就迫使 $\kappa(x.\ y)=0$。

系　Killing 形式 κ 在 $L_0=C_L(H)$ 上的限制 $\kappa|_{L_0\times L_0}$ 是非退化。

證明　由定理 5.1 知 κ 是非退化。他方面，依命題 L_0 和所有的 $L_\alpha(\alpha\in\Phi)$ 是正交。如果 $z\in L_0$ 而且 $\kappa(z,L_0)=0$，那麼 $\kappa(z,L)=0$，所以 $z=0$。

8.2.　H的中心化子

我們將需一個很容易證明的線性代數的事實:

引理　如果 x,y 是一有限維向量空間的交換自同態而且 y 是冪零，那麼 xy 也是冪零；特別，$Tr(xy)=0$。

命題　令 H 是 L 的極大環面子代數。那麼 $H=C_L(H)$。

證明　我們將分段證明。記 $C=C_L(H)$。

(1) C包含它的一切元素的半單部及冪零部。我們說$x\in C_L(H)$的意思是說 $ad x$ 把L的子空間H映至0。依命題 4.2 知$(ad x)_s$ 和$(ad x)_n$ 也有相同的性質。但是根據 (5.4) 我們就得 $(ad x)_s=ad x_s$ 而且 $(ad x)_n=ad x_n$。

(2) C中的一切半單元都落在H中。如果 $x\in C_L(H)$ 是半單，那麼 $H+\mathbf{F}_x$（顯然是 L 的一個交換子代數）是環面子代數：交換半單元素的和還是半單 (4.2)。但是H是極大環面子代數，所以，$H+\mathbf{F}_x=H$因而$x\in H$。

(3) κ限制在H上是非退化。如果存在$h\in H$ 而 $\kappa(h,H)=0$，我們欲證$h=0$。如果$x\in C$是冪零，那麼由 $[x,H]=0$ 以及 $ad x$ 是冪零的事實知 $Tr(ad x\ ad y)=0$ （利用上面的引理），$\forall y\in H$ 或者 $\kappa(x,H)=0$。然而由 (1) 和 (2) 導致 $K(h,C)=0$，因此$h=0$（由命題 8.1 的系已知K限制在C上是非退化）。

(4) C是冪零。如果 $x\in C$是半單，那麼由(2)知$x\in H$，而且$ad_C x(=0)$ 當然是冪零。他方面，如果$x\in C$是冪零，那麼 $ad_C x$ 當然也是冪零。現在令$x\in C$是任意的，$x=x_s+x_n$ 因為 x_s, x_n 兩者都是落在 C 中，（由(1)），$ad_C x$ 是交換冪零元素的和因而也是冪零。由 Engel 定理知C是冪零。

(5) $H\cap[c,c]=0$。因為κ是結合而且$[H,C]=0$, $\kappa(H,[C,C])=0$，現在只要利用 (3) 就得證。

(6) C是交換的。不然的話，$[C,C]\neq 0$由 (4) 知C是冪零，所以 $Z(C)\cap[C,C]\neq 0$ （引理 3.3）。令 $0\neq z\in Z(C)\cap[C,C]$ 由 (2) 及 (5) 知z不可能是半單。所以它的冪零 z_n 部因而不是零而且也落在C中，由命題 4.2 知 $z_n\in Z(c)$。由引理知 $\kappa(n,C)=0$ 與系 8.1 不合。

(7) $C=H$。不然的話，由 (1) 及 (2) 知C包含一個非零冪零

元x。根據引理及（6）知 $\kappa(x,y)=Tr(ad\,y\ ad\,y)=0\ \forall\, y\in C$ 此與系 8.1 不合。

系　κ 限制在H上是非退化。

這個系理容許我們認同H和 H^*，對$\phi\in H^*$ 對應唯一的 $t_\phi\in H$ 使得 $\phi(h)=\kappa(t_\phi,h),\forall\, h\in H$。特別，$\Phi$ 對應於 $\{t_\alpha|\alpha\in\Phi\}\subset H$。

8.3.　正交性質

在這一節中，利用 Killing 形式，我們將得到有關根空間分解的更正確的資料。我們已看到命題 8.1：如果 $\alpha,\beta\in H^*$ 而且 $\alpha+\beta\neq 0$，那麼 $(L_\alpha,L_\beta)=0$；特別 $\kappa(H,L_\alpha)=0$ 對所有$\alpha\in\Phi$，所以（命題 8.2.）κ 在H上的限制是非退化。

命題　(a) Φ生成 H^*.

(b) 如果$\alpha\in\Phi$，那麼$-\alpha\in\Phi$。

(c) 令$\alpha\in\Phi$, $x\in L_\alpha$, $y\in L_{-\alpha}$ 於是 $[xy]=\kappa(x.y)t_\alpha$(t_α 的定義如 (8.2))。

(d) 如果$\alpha\in\Phi$，那麼 $[L_\alpha,L_{-\alpha}]$ 是一維的，其基底是 t_α。

(e) $\alpha(t_\alpha)=\kappa(t_\alpha,t_\alpha)\neq 0\ \forall\,\alpha\in\Phi$。

(f) 如果 $\alpha\in\Phi$ 而且 $x_\alpha(\neq 0)\in L_\alpha$ 是任意的，那麼存在 $y_\alpha\in L_{-\alpha}$ 使得 $x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha=[x_\alpha,y_\alpha]$ 生成一個三維子代數S。不僅如此，S經由以下的對應，知其與 $sl(2,\mathbf{F})$ 同構:

$$x_\alpha\longrightarrow\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ y_\alpha\longrightarrow\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ h_\alpha\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

(9) $h_\alpha=\dfrac{2t_\alpha}{\kappa(t_\alpha,t_\alpha)},\ h_\alpha=-h_{-\alpha}.$

證明　(a) 如果Φ不能生成整個 H^*，那麼由對偶的性質知H中存在一個 $h(\neq 0)$ 使得

$$\alpha(h)=0,\forall\,\alpha\in\Phi,$$

但是，這意思是說對一切 $\alpha\in\Phi$, $[h, L_\alpha]=0$，因爲 $[h, H]=0$，所以 $[h, L]=0$ 或 $h\in Z(L)=0$，這是不合理的。

(b) 令 $\alpha\in\Phi$。如果 $-\alpha\notin\Phi$ 卽 $L_{-\alpha}=0$，那麼對一切的 $\beta\in\Phi$, $\kappa(L_\alpha, L_\beta)=0$（命題 8.1）所以 $\kappa(L_\alpha, L)=0$ 此與K是非退化的事實不合。

(c) 令 $\alpha\in\Phi$, $x\in L_\alpha$, $y\in L_{-\alpha}$。令 $h\in H$ 是任意。由 κ 的結合性質知:

$$\begin{aligned}\kappa(h, [xy])&=\kappa([hx], y)=\alpha(h)\kappa(x. y)\\&=\kappa(t_\alpha, h)\kappa(x, y)=\kappa(\kappa(x, y)t_\alpha, h)\\&=\kappa(h, \kappa(x, y)t_\alpha)\text{。}\end{aligned}$$

這說明了H 和 $[xy]-\kappa(x, y)t_\alpha$ 是正交，所以 $[xy]=\kappa(xy)t_\alpha$（系 8.2)。

(d) 如果 $[L_\alpha, L_{-\alpha}]\neq 0$，前面 (c) 證明了 t_α 生成 $[L_\alpha L_{-\alpha}]$。令 $0\neq x\in L_\alpha$ 如果 $\kappa(x, L_{-\alpha})=0$，那麼 $\kappa(x, L)=0$（參考 (b) 的證明），這就違反K的非退化性。所以我們能够求得 $0\neq y\in L_{-\alpha}$ 使得 $\kappa(x, y)\neq 0$。由 (c) 知 $[x, y]\neq 0$。

(e) 假定 $\alpha(t_\alpha)=0$，於是對一切 $x\in L_\alpha$, $y\in L_{-\alpha}$, $[t_\alpha x]=0=[t_\alpha y]$ 如 (d)，我們能够求得這樣的 x, y 滿足 $\kappa(x. y)\neq 0$。只要將其中的一個稍微修正一下，我們就可以假定 $\kappa(x. y)=1$。於是由 (c) 知 $[xy]=t_\alpha$。所以 x, y, t_α 就生成 L 的一個三維可解子代數，記爲 S。$S\cong ad_L S\subset gl(L)$。特別，對一切 $s\in[S, S]$, $ad_L s$ 是冪零（系 4.1A)，所以 $ad_L t_\alpha$ 既是半單也是冪零，卽 $ad_L t_\alpha=0$。因而 $t_\alpha\in Z(L)=0$，與 t_α 的選擇不合。

(f) 對於 $0\neq x_\alpha\in L_\alpha$，我們能求得 $y_\alpha\in L_{-\alpha}$ 使得 $\kappa(x_\alpha, y_\alpha)=\dfrac{2}{\kappa(t_\alpha, t_\alpha)}$。由 (e) 及 $\kappa(L_\alpha, L_{-\alpha})\neq 0$ 的事實我們知道上面所說的

是做得到的。置 $h_\alpha=2t_\alpha/\kappa(t_\alpha,t_\alpha)$。於是 $[x_\alpha,y_\alpha]=h_\alpha$ (c)。不僅如此，$[h_\alpha x_\alpha]=\dfrac{2}{\alpha(t_\alpha)}[t_\alpha x_\alpha]=\dfrac{2\alpha(t_\alpha)}{\alpha(t_\alpha)}x_\alpha=2x_\alpha$ 同理，$[h_\alpha,y_\alpha]=-2y_\alpha$。所以 $x_\alpha,y_\alpha,h_\alpha$ 生成 L 的一個三維子代數 S_α，它的乘法表和 $sl(2.\mathbf{F})$ 的一樣（例 2.1）。

(g) 由 t_α 的定義方法及 h_α 的定義方法卽得證。

8.4.　整數性質

對於每一根對 $\alpha,-\alpha$（命題 8.3(b)），令 $S_\alpha\simeq sl(2,\mathbf{F})$ 如命題 8.3(f) 中所造的子代數。由 Weyl 定理和定理 7.2，我們已能完整地瞭解一切的（有限維）S_α 模的結構；特別，我們能够瞭解 $ad_L S_\alpha$。

固定 $\alpha\in\Phi$。首先考慮 L 中由 H 及一切 $L_{c\alpha}(c\in\mathbf{F}^*)$ 生成的子空間 M。由命題 8.1 知 M 是一個 S_α 模。由定理 7.2 知 h_α 在 M 上的權是 0 及 $2c=c\alpha(h_\alpha)$ ($c\neq0$ 而且 $L_{c\alpha}\neq0$)。特別，這裏出現的一切 c 必須是 $\frac{1}{2}$ 的整數倍。現在 S_α 在 $Ker\,\alpha$ 上的作用是等於零，在此 $Ker\,\alpha$ 是 H 的子空間而且 $H=Ker\,\alpha+\mathbf{F}h_\alpha$, $dimH/Ker\alpha=1$，然而另一方面 S_α 本身是 M 的 S_α 子模。綜和此兩件事，我們知 h_α 在 M 上的 0 權都已出現在 S_α 及 $Ker\,\alpha$ 上。所以，M 中的偶數權只是 0 及 ±2 而已。這證明了 2α 不是根，卽一根的兩倍絕不再會是根。因而 $(1/2)\,\alpha$ 也不可能是根，所以 1 不可能是 h_α 在 M 中的權。定理 7.2 的系導致 $M=H+S_\alpha$。特別 $dimL_\alpha=1$（所以 S_α 是由 L_α 及 $L_{-\alpha}$ 唯一決定的子代數），而且如果 $c\alpha$ 是根，則 $c=\pm1$。

其次，我們要看看 S_α 如何作用於根空間 L_β, $\beta\neq\pm\alpha$。置 $N=\sum_{i\in L}L_{\beta+i\alpha}$。根據前一段，每一根空間是一維，而且 $\beta+i\alpha$ 不會等於 0；所以 K 是 L 的一個子 S_α 模，其屬於相異權 $\beta(h_\alpha)+2i(i\in\mathbf{Z}$ 使

得$\beta+i\alpha\in\Phi$)的權空間是一維。顯然，1 和 0 不可能同時是這種形式的權，由定理 7.2 的系知N是既約。最高（最低）權一定是$\beta(h_\alpha)+2q$ （$\beta(h_\alpha)-2r$)，在此$q(r)$是最大正整數使得$\beta+qr$ （$\beta-r\alpha$)是一根。不僅如此，N上的權成一算術級數其公差是 2（定理 7.2）因而這些根 $\beta+i\alpha$ 形成一個根鏈（通過 β 的 α 根鏈） $\beta-r\alpha,\cdots\cdots,\beta,\cdots\cdots,\beta+q\alpha$。也注意 $(\beta-r\alpha)(h_\alpha)=-(\beta+q\alpha)(h_\alpha)$ 或 $\beta(h_\alpha)=r-q$。最後，如果 α，β，$\alpha+\beta\in\Phi$，那麼 adL_α 將 L_β 映至 $L_{\alpha+\beta}$，因為這些空間的維數都是 1 所以 $[L_\alpha L_\beta]=L_{\alpha+\beta}$。

總結以上的討論:

命題 (a)如果$\alpha\in\Phi$ 則 $dimL_\alpha=1$。特別，$S_\alpha=L_\alpha+L_{-\alpha}+H_\alpha$ $(H_\alpha=[L_\alpha,L_{-\alpha}])$，而且對於任意$0\neq x_\alpha\in L_\alpha$，存在唯一的 $y_\alpha\in L_{-\alpha}$ 滿足 $[x_\alpha y_\alpha]=h_\alpha$。

(b) 如果$\alpha\in\Phi$，那麼$-\alpha\in\Phi$而且如果 $c\alpha\in\Phi$，則 $c=\pm1$。

(c) 如果$\alpha,\beta\in\Phi$，那麼 $\beta(h_\alpha)\in\mathbf{Z}$ 而且 $\beta-\beta(h)\alpha\in\Phi$。($\beta(h_\alpha)$ 叫做 Cartan 整數)

(d) 如果$\alpha,\beta,\alpha+\beta\in\Phi$，那麼 $[L_\alpha L_\beta]=L_{\alpha+\beta}$。

(e) 令$\alpha,\beta\in\Phi,\beta\neq\pm\alpha$，令$r,q$ 分別是最大正整數使得 $\beta-r\alpha,\beta+q\alpha\in\Phi$。那麼一切$\beta+i\alpha\in\Phi(-r\leq i\leq q)$ 而且 $\beta(h_\alpha)=r-q$。

(f) 李代數L是由一切的根空間生成。

8.5. 有理性質，總結

L是一個半單李代數（佈於特徵數為 0 的代數封閉體 **F** 上），H是一個極大環面子代數，$\Phi\subset H^*$ 是L 相對於H的根集，$L=H+\coprod_{\alpha\in\Phi}L_\alpha$ 是L的根空間分解。

因爲 Killing 形式κ在H上的限制 $\kappa|_H$ 是非退化（系 8.2），我們可以將形式轉至 H^* 上，令 $(\gamma,\delta)=\kappa(t_\gamma,t_\delta)$, γ, $\delta\in H^*$。我們知Φ生成 H^*（命題 8.3(a)），所以選取 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_l\in\Phi$爲 H^* 的基底。如果$\beta\in\Phi$,我們能够將β唯一地表示爲$\beta=\sum_{i=1}^{l}c_i\alpha_i$，在此，$c_i\in\mathbf{F}$，我們主張 $c_i\in\mathbf{Q}$。爲此之故，我們利用一點點線性代數。對於每一j, $1\le j\le l$, $(\beta,\alpha_j)=\sum_{i=1}^{l}c_i(\alpha_i,\alpha_j)$，所以在式子的兩端乘以 $2/(\alpha_i,\alpha_j)$ 就得：$2(\beta,\alpha_j)/(\alpha_j,\alpha_j)=\sum_{i=1}^{l}\frac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)}$。這可以看成是 l 個未知數 c_i 的 l 個整係數方程式組。因爲$(\alpha_1,\cdots\cdots,\alpha_l)$是 H^* 的一組基底，而且雙線性形式（，）是非退化，所以矩陣 $(\alpha_i,\alpha_j)_{1\le i,\,j\le l}$ 是非奇異；所以方程組的係數矩陣也同樣是非奇異。因而我們可以結論此方程組有唯一的有理數解，所以我們的主張就得證。

我們剛剛已證明在 H^* 中由所有的根生成的 Q 空間 E_Q 其維數是 $l=dim_F H^*$。不僅如此，E_Q 中的向量的一切內積是有理數（所以在 E_Q 上我們有一個非退化形式）。更進一步的事實：對於λ, $\mu\in H^*$, $(\lambda,\mu)=K(t_\lambda,t_\mu)=\sum_{\alpha\in\Phi}\alpha(t_\lambda)\alpha(t_\mu)=\sum_{\alpha\in\Phi}(\alpha,\lambda)(\alpha,\mu)$。特别，如果 $\lambda\in E_Q$, 則 $(\lambda,\lambda)=\sum_{\alpha\in\Phi}(\alpha,\lambda)^2$是有理數的平方和，因此是正數（除非$\lambda=0$）所以雙線性形式（　，　）是正定向的。

現在令 $E=\mathbf{R}\otimes_Q E_Q$。另一個看法是 $E=\{\sum c_i\alpha_i|c_i\in\mathbf{R}\}$。那麼$E$是$\mathbf{R}$上的一個向量空間。由上面所述的，我們知道 E_Q 上的形式（　，　）自然地擴張至E上而且是正定向，即E是一個歐氏空間。Φ包含E的一組基底而且 $dim\,\mathbf{R}E=l$。以下的定理總結有關Φ的一些基本性質：參考命題 8.3(a)(b) 和 8.4(b)(c)。

定理　L,H,Φ E如上。那麼：

(a) Φ生成E，而且$0\notin\Phi$。

(b) 如果$\alpha\in\Phi$,那麼$-\alpha\in\Phi$，又如果$c\neq\pm 1$，那麼$c\alpha\notin\Phi$。

(c) 如果α，$\beta\in\Phi$，那麼$\beta-\dfrac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha\in\Phi$。

(d) 如果α，$\beta\in\Phi$，那麼$\dfrac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\in\mathbf{Z}$。

以第二章的語言來說，此定理的主張：Φ是歐氏空間 E 中的根系。所以我們建立了一個對應

$$(L,H)\longrightarrow(\Phi,E)$$

在第三章中我們將完整地把配對 (Φ,E) 加以分類。以後（第四章及第五章）我們將看到上面的對應是一一對應的，而且Φ與H的選取是不太有關的。

習　題

1. 如果L是古典線性李代數 A_l,B_l,C_l，或 D_l 中的一種（參考 (1.2)），試證 L 中一切對角形矩陣的集合是一個 l 維極大環面子代數。

2. 對於習題 1 中的各代數，試決定其根及根空間。在 (1.2) 中，以H的基底表示 h_α 時會有幾種不同的表示法？

3. 如果L是古典李代數時，試明確地計算 Killiug 形式在極大環面子代數（如習題 1 所描述）上的限制。

4. 如果$L=sl(2,\mathbf{F})$，試證每一個極大環面子代數是一維的。

5. 如果L是半單，H是極大環面子代數，試證H是自身正規化（即 $H=N_L(H)$）。

6. 試計算 $sl(n,\mathbf{F})$ 的標準基底在 Killing 形式下的對偶基底。（參考習 5.5）

7. 令 L 是半單，H 是極大環面子代數。如果 $h\in H$，試證 $C_L(h)$ 是縮減的（參考習題 6.5）。試證H包含一個 h 使得 $C_L(h)=H$；$sl(n,\mathbf{F})$ 中那一個 h 具有這樣的性質?

8. 對於 $sl(n,\mathbf{F})$（以及其他典型代數），試明確地計算根鏈和 Cartan 整數。特別，試證在 $sl(n,\mathbf{F})$ 中，Cartan 整數 $2(\alpha,\beta)/(\beta,\beta)$，是 0，或 ± 1，其中 $\alpha\neq\pm\beta$。

9. 試證每一個三維半單李代數的根系都和 $sl(2,\mathbf{F})$ 的根系一樣，因而是與 $sl(2,\mathbf{F})$ 同構。

10. 試證半單李代數不可能是四維，五維及七維的。

11. 如果 $(\alpha,\beta)>0$，試證 $\alpha-\beta\in\Phi(\alpha,\beta\in\Phi)$。是否逆命題也成立?

附　註

在此我們寧採用極大環面子代數而不採用較傳統(不過是等價)的Cartan子代數的主要想法是由半單代數羣的平行理論而引發出來的。

第三章　根　　系

9.　公理化

9.1.　歐氏空間中的鏡射

在這一整章裏我們考慮一個固定的歐氏空閒E，卽一個具有一個正定向，對稱的雙線性形式(α, β)的有限維實向量空間。在幾何上，E中的一個鏡射是指一個可逆線性映射它會固定某一超平面（比原空間少一維的子空間）而且把此超平面的正交餘中的每一向量送至它的負向量。顯然，每一個鏡射都是正交的，卽保持E中的內積不變。任何非零向量 α 決定一個鏡射 σ_α，其鏡射超平面 $P_\alpha=\{\beta\in E \mid (\beta, \alpha)=0\}$。當然，如果 $c\neq 0$，則 $c\alpha$ 決定的鏡射和α的一樣。我們可以容易地寫下一個明確的公式:

$$\sigma_\alpha(\beta)=\beta-\frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha.$$

（這個公式確實把α送至$-\alpha$而把 P_α 中每一點都固定不動。）因爲 $2(\beta, \alpha)/(\alpha, \alpha)$ 常常出現，所以我們將它縮寫爲 $<\beta, \alpha>$。注意，$<\beta, \alpha>$只對於第一個變數β來說才是線性的。

爲了以後的用途我們寫下以下的事實。

引理　令Φ是E中的一個有限生成集。假定一切的鏡射$\sigma_\alpha(\alpha\in\Phi)$保持$\Phi$不變。如果$\sigma\in GL(E)$保持$\Phi$不變，固定$E$中某一超平面的

每一點，以及送某一非零向量 $\alpha\in\Phi$ 至其負向量，那麼 $\sigma=\sigma_\alpha$（而且 $P=P_\alpha$）。

證明 令 $\tau=\sigma\sigma_\alpha$ $(\sigma_\alpha=\sigma_\alpha^{-1})$。那麼 $\tau(\Phi)=\Phi, \tau(\alpha)=\alpha$，又 τ 在子空間 $\mathbf{R}_\alpha$ 以及商空間 $E/\mathbf{R}_\alpha$ 上的作用和么射一樣。所以 τ 所有的固有值都是 1 而且其最低多項式除盡 $(T-1)^l$ $(l=dimE)$。他方面，因爲 Φ 是有限，所以向量 $\beta, \tau(\beta), \cdots\cdots, \tau^k(\beta)(\beta\in\Phi, k\geq Card\Phi)$ 不可能都是相異的，因而存在某一整數 k 使得 $\tau^k(\beta)=\beta$。選取足够大的 k 使得 τ^k 固定所有的 $\beta\in\Phi$。因爲 Φ 生成 E，所以 $\tau^k=1$；所以 τ 的最低多項式除盡 T^k-1。綜合以上的結果知 τ 的最低多項式是 $T-1=g.c.d.(T^k-1,(T-1)^l)$，卽 $\tau=1$。

9.2. 根系

設 Φ 是歐氏空間 E 中的一個集合。如果 Φ 滿足以下的公理:

(R1) Φ 是 E 的有限生成集，但 $0\notin\Phi$。

(R2) 如果 $\alpha\in\Phi$，那麼 $-\alpha\in\Phi$，又如果 $c\neq\pm1$，則 $c\alpha\notin\Phi$。

(R3) 如果 $\alpha\in\Phi$，那麼 $\sigma_\alpha(\Phi)=\Phi$。

(R4) 如果 $\alpha, \beta\in\Phi$，那麼 $\langle\beta,\alpha\rangle\in\mathbf{Z}$。

那麼 Φ 叫做 E 中的根系。公理有一些是多餘的；特別，(R2) 和 (R3) 兩個都可導出 $\Phi=-\Phi$。在文獻中，(R2) 有時候被省略掉，此時我們稱這樣的 Φ 是“減縮根系”（參考習題 9）。注意，如果將 E 上的內積換成它的正倍數，則公理不受影響，因爲公理中只出現內積的比。

令 Φ 是 E 中的一個根系。以 $\mathscr{W}$ 表示 $GL(E)$ 中由鏡射 $\sigma_\alpha(\alpha\in\Phi)$ 生成的子羣。由 (R3) $\mathscr{W}$，對集合 Φ 有排列作用。由 (R1) 知 Φ 是 E 的有限生成集，所以 $\mathscr{W}$ 可以跟 Φ 上的對稱羣的某一子羣認同；特別，$\mathscr{W}$ 是有限的。$\mathscr{W}$ 是叫做 Φ 的 Weyl 羣而且在後來扮演一個十分重要

的角色。以下的引理指出E的自同構在$\mathscr{W}$上的共軛作用的究竟。

引理: 令 Φ 是 E 中的一個根系, $\mathscr{W}$ 是其 Weyl 羣。如果 $\sigma \in GL(E)$ 而且 $\sigma(\Phi)=\Phi$, 那麼 $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}=\sigma_{\sigma(\alpha)}$ $\forall \alpha \in \Phi$, 而且 $<\beta,\alpha>=<\sigma(\beta),\sigma(\alpha)>$ $\forall \alpha,\ \beta \in \Phi$

證明: 因爲 $\sigma_\alpha(\beta)\in\Phi$, 所以 $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}(\sigma(\beta))=\sigma\sigma_\alpha(\beta)\in\Phi$。不過這是等於 $\sigma(\beta-<\beta,\alpha>\alpha)=\sigma(\beta)-<\beta,\alpha>\sigma(\alpha)$。因爲$\beta$取盡$\Phi$中的元素時, $\sigma(\beta)$ 也取盡Φ的元素, 所以 $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}$ 保持Φ不變。不僅如此, $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}$ 固定超平面 $\sigma(P_\alpha)$ 中的每一點而且把 $\sigma(\alpha)$ 送至$-\sigma(\alpha)$。依引理 9.1, $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}=\sigma_{\sigma(\alpha)}$。現在比較上式和等式 $\sigma_{\sigma(\alpha)}(\sigma(\beta))=\sigma(\beta)-<\sigma(\beta),\sigma(\alpha)>\sigma(\alpha)$ 我們得$<\sigma(\alpha),\sigma(\beta)>=(\alpha,\beta))$。

對於兩個對 (Φ,E) 和 (Φ',E') 之間有一個自然的同構觀念: 我們說 (Φ,E) 和 (Φ',E') 是同構是指存在一個向量空間的同構(不須要是保持內積) $\phi: E\to E'$ 滿足 $\phi(\Phi)=\Phi'$ 而且對於 $\alpha,\ \beta\in\Phi$, $<\phi(\beta),\ \phi(\alpha)>=<\beta,\alpha>$。由此立得 $\sigma_{\phi(\alpha)}(\phi(\beta))=\phi(\sigma_\alpha(\beta)$。所以根系的一個同構在 Wey羣$\mathscr{W}$上引出一個自然同構$\longrightarrow\phi\circ\sigma\circ\phi^{-1}$。由上面的引理看起來, Φ 的一個自同構和 $GL(E)$ 中會保持Φ不變的元素是一樣。特別, 我們可以將$\mathscr{W}$看成是 $Aut\ \Phi$的一個子羣(參考習題6)。

有時候除了考慮α之外, 我們也老慮 $\alpha^\vee=\dfrac{2\alpha}{(\alpha,\alpha)}$, 這是很有用的。我們稱 $\Phi^\vee=\{\alpha^\vee|\alpha\in\Phi\}$ 是Φ的對偶或逆。事實上 $\Phi^\vee$ 是E中的一個根系其 $Weyl$ 羣和$\mathscr{W}$ 是同構(習題2)。在第八節中的李代數情形下, 藉由 Killing 形式我們知α對應 t_α 而 $\alpha^\vee$ 對應 h_α

9.3. 範 例

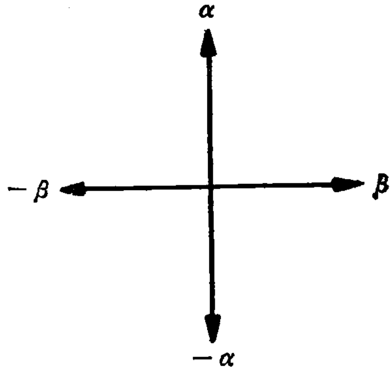
$l=dimE$ 叫做根系Φ的秩。當 $l\leq 2$ 時, 我們利用畫圖就能描述Φ。由 $(R2)$ 看來, 當 $l=1$ 時只有一種可能性, 記爲 (A_1):



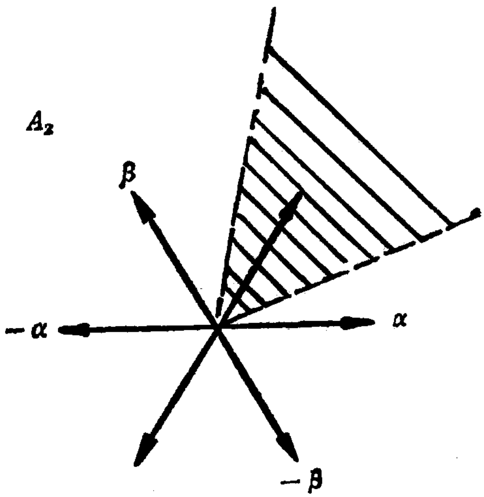
當然這確實是一個根系（其 Weyl 羣的元數是 2）； 在李代數理論中，它是屬於 $sl(2, \mathbf{F})$。

當 $l=2$ 時，可能性就比較多，其中的四種可能情形描述如下（圖一）（這正好是僅有的可能性）。對於每一種情形，讀者應當直接檢驗公理並且決定它的$\mathscr{W}$。

$A_1 \times A_1$



A_2



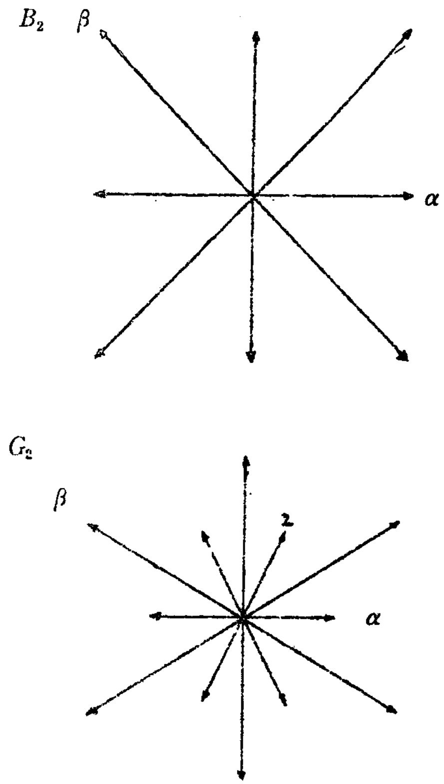


圖 一

9.4. 根 對

首先我們複習兩個向量 α，$\beta\in\Phi$ 的交角 θ 的定義 $\cos\theta=(\alpha,\beta)/\|\alpha\|\cdot\|\beta\|$。所以 $<\beta,\alpha>=\dfrac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}=2\dfrac{\|\beta\|}{\|\alpha\|}\cos\theta$ 而且 $<\alpha,\beta><\beta,\alpha>=4\cos^2\theta$ 。由（$R4$）知，最後這個數是一個非負整數，但是 $0\leq\cos^2\theta\leq 1$ 而且 $<\beta,\alpha>,<\alpha,\beta>$ 有相同的正負號，所以當 $\alpha\neq\pm\beta$ 而且 $\|\beta\|\geq\|\alpha\|$ 時，以下是僅有的可能性（表一）。

表　一

$<\alpha,\beta>$	$<\beta,\alpha>$	θ	$\|\beta\|^2/\|\alpha\|^2$
0	0	$\pi/2$	未定
1	1	$\pi/3$	1
-1	-1	$2\pi/3$	1
1	2	$\pi/4$	2
-1	-2	$3\pi/4$	2
1	3	$\pi/6$	3
-1	-3	$5\pi/6$	3

讀者將觀察到這些角及相對長度正好是圖一(9.3)中所出現的情形。（對於 $A_1\times A_1$ 來說，將一個方向的量度加以修正使得 $\|\alpha\|=\|\beta\|$是無害的。）以下簡單而有用的判斷準則是可由表一看出來。

引理: 令α，$\beta\in\Phi$而且$\beta\neq c\alpha$ $\forall c\in\mathbf{R}$。如果$(\alpha,\beta)>0$（卽，α和β的交角是銳角），那麼$\alpha-\beta\in\Phi$。如果$(\alpha,\beta)<0$，那麼$\alpha+\beta\in\Phi$

證明: 由第一個主張可立得第二個主張（以$-\beta$代替β就行了)。因爲$(\alpha,\beta)>0\Longleftrightarrow<\alpha,\beta>0$，所以由表一知$<\alpha,\beta>$, $<\beta,\alpha>$中有一個是1。如果$<\alpha,\beta>=1$，那麼$\sigma_\beta(\alpha)=\alpha-\beta\in\Phi$ ($R3$)；同理，如果$<\beta,\alpha>=1$，那麼$\beta-\alpha\in\Phi$，因此$\sigma_{\beta-\alpha}(\beta-\alpha)=\alpha-\beta\in\Phi$。

爲了給一個應用，我們考慮一對α，$\beta\in\Phi$而且$\beta\neq c\alpha$ $\forall$ $c\in\mathbf{R}$。考慮形如$\beta+i\alpha(i\in\mathbf{Z})$的根的全體，卽過$\beta$的$\alpha$-根鏈。令$r$，$q\in\mathbf{Z}^+$是最大的整數使得$\beta-r\alpha\in\Phi$, $\beta+q\alpha\in\Phi$。如果有某一個$\beta+i\alpha\notin\Phi(-r\leq i\leq q)$，我們能够求得$p<s$ $(-r\leq p<s\leq q)$ 使得$\beta+p\alpha\in\Phi$, $\beta+(p+1)\notin\Phi$, $\beta+(s-1)\alpha\notin\Phi$, $\beta+s\alpha\in\Phi$。於是由引理

知 $(\alpha,\beta+p\alpha)\geq 0$，$(\alpha,\beta+s\alpha)\leq 0$。因爲 $p<s$ 而且 $(\alpha,\alpha)>0$，所以這是荒謬的。我們可以得一結論卽通過 β 的 α-根鏈從 $\beta-r\alpha$ 至 $\beta+q\alpha$ 是不會中斷的。現在 σ_α 對一個根的作用只是對該根加上或減去 α 的倍數，所以這根鏈在 σ_α 的作用下保持不變。在幾何上，σ_α 顯然只是把此鏈反轉過來（讀者能够容易地提供一個代數的證明）。特別，$\sigma_\alpha(\beta+q\alpha)=\beta-r\alpha$。左端是 $\beta-<\beta,\alpha>\alpha-q\alpha$，所以最後我們得 $r-q=<\beta,\alpha>$（參考命題 8.4(e)）。由此馬上得知根鏈的長度最多不超過 4。

習 題

（除非另有所述，否則 Φ 表示是 E 中的根系，其 *Weyl* 羣是 $\mathscr{W}$。）

1. 令 E' 是 E 的子空間。如果鏡射 σ_α 保持 E' 不變，試證 $\alpha\in E'$ 或 $E'\subset P_\alpha$。

2. 試證 $\Phi^\vee$ 是 E 中的根系，它的 Weyl 羣與 $\mathscr{W}$ 是自然同構；同時試證 $<\alpha^\vee,\beta^\vee>=<\beta,\alpha>$ 並且試畫 A_1,A_2,B_2,G_2 的 $\Phi^\vee$ 的圖。

3. 在表一中，試證當 $\theta=\pi/2,\pi/3$（或 $2\pi/3$），$\pi/4$（或 $3\pi/4$）$\pi/6$（或 $5\pi/6$）時，$\sigma_\alpha\sigma_\beta\in\mathscr{W}$ 的階數分別是 2，3，4，6 〔注意 $\sigma_\alpha\sigma_\beta$ 等於是旋轉 2θ 的旋轉。〕

4. 試證 $A_1\times A_1,A_2,B_2,G_2$ 的 Weyl 羣是兩面體體羣其元數分別是 4，6，8 及 12。如果 Φ 是一個根系其秩爲 2 試證它的 Weyl 羣必是這其中之一。

5. 試舉一例證明卽使 $(\alpha,\beta)\leq 0$，$\alpha-\beta$ 也可能是一個根（參考引理 9.4）。

6. 試證 $\mathscr{W}$ 是 *Aut* Φ（$=\Phi$ 的一切自同構形成的羣）的正規子羣。

7. 令α，$\beta\in\Phi$生成E的一個子空間 E'。試證$E'\cap\Phi$是 E' 中的一個根系。同理試證 Φ （原書誤植爲 E'）$\cap(\mathbf{Z}_\alpha+\mathbf{Z}_\beta)$ 是 E' 中的一個根系（這是否必須和 $E'\cap\Phi$ 是一致？）。更一般，令 Φ' 是的一個非空子集合而且滿足 $\Phi'=-\Phi'$，以及如果，α，$\beta\in\Phi'$，$\alpha+\beta\in\Phi$則得$\alpha+\beta\in\Phi'$則得。試證Φ是其所生成的空間中的一個根系。（試利用表一）。

8. 試計算 G_2 中的根鏈以證明關係式$r-q=<\beta,\alpha>$

9. 令Φ是在歐氏空間E中滿足$(R1)$,$(R3)$,$(R4)$的向量集合。試證如果$c\alpha\in\Phi$時那麼$c=\pm1$，$\pm1/2$，以及±2。試證 $\{\alpha\in\Phi|2\alpha\notin\Phi\}$ 是一個根系。例：參考圖二

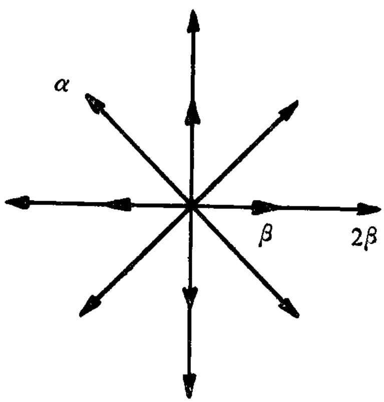


圖 二

10. 令α，$\beta\in\Phi$。令過 β 的 α-鏈是 $\beta-r\alpha$, ……, $\beta+q\alpha$, 而且過 α 的 β- 鏈是 $\alpha-r'\beta$, ……, $\alpha+q'\beta$。試證 $\dfrac{q(r+1)}{(\beta,\beta)}=\dfrac{q'(r'+1)}{(\alpha,\alpha)}$。

11. 令c是一正實數。如果Φ包含任何長度的平方是c的根，試證這種根的全體是其在E中的生成空間的一個根系。試描述出現在圖

一中的可能性。

附 註

用公理化的方法處理根系（如 Serre〔2〕, Bourbaki〔2〕）的好處是由此而得結果可同時應用到李代數，李羣，以及線性代數羣上去。至於歷史上的處理方法可參考 Bourbaki〔2〕。

10. 單根與 Weyl 羣

在這一整節中，Φ表示是 l 維歐氏空間 E 中的根系，而$\mathscr{W}$ 是 E 的 Weyl 羣。

10.1. 基底與 Weyl 室

如果Φ的一個子集合△滿足以下的條件:

($B1$) △是 E 的基底，

($B2$) 每一個根 β 都能够表成 $\beta=\sum k_\alpha\alpha(\alpha\in\Delta)$ 其係數 k_α 或全爲非負整數或全爲非正整數。我們說△是一個基底。

△中的根叫做單根。由 ($B1$) 知 $Card\,\Delta=l$，而且 β 在 ($B2$) 中的表示是唯一的。這使我們能够定義一個根的高度 $h_t\beta=\sum k_\alpha$。如果所有的$k_\alpha\geq 0$（或$k_\alpha\leq 0$）我們稱 β 是正根（　　或負根）而且記爲 $\beta\succ 0$（或 $\beta\prec 0$）。所有的正根的集合和所有的負根的集將分別記爲 Φ^+,Φ^-（顯然，$\Phi^-=-\Phi$）。如 α,β 是正根而且 $\alpha+\beta$ 是一個根，那麼 $\alpha+\beta$ 也是正根。事實上，△在 E 上定義一個偏序其與記號 $\alpha\succ 0$ 是一致的: 定義 $\beta\prec\alpha$ 當且僅當 $\alpha-\beta$ 是正根（也就是單根）的和或 $\beta=\alpha$。

關於基底的定義我們將面臨的唯一難題就是我們並不能保證其存

在性。在 (9.3) 中所示的例子中，不論那一種情形標爲 α，β 的兩根都是基底（試證之）。注意，α 和 β 的夾角是鈍角，即 $(\alpha,\beta)\leq 0$。這件事並不是意外的。

引理　如果Δ是Φ的基底，那麼對於Δ中的兩個根 $\alpha\neq\beta$，$(\alpha,\beta)\leq 0$ 而且 $\alpha-\beta\notin\Phi$

證明　假設 $(\alpha,\beta)>0$。由已知，$\alpha\neq\beta$　又因爲 $\alpha\neq-\beta$ 所以由引理 9.4 知 $\alpha-\beta\in\Phi$。但是這和 $(B2)$ 不合，所以 $(\alpha,\beta)\leq 0$。

我們的目標是證明以下的定理。

定理　Φ必有一基底。

事實上，這定理的證明將提供一個造所有（可能）的基底的具體方法。對於每一向量 $\gamma\in E$，定義 $\Phi^+(\gamma)=\{\alpha\in\Phi\,|\,(\gamma,\alpha)>0\}=$所有落在與 γ 正交的超平面的“正”側的根集。在歐氏幾何中有一基本事實是有限個超平面 $P_\alpha(\alpha\in\Phi)$ 的聯集無法覆蓋整個空間 E（由讀者自己提供一個嚴格的證明）。如果 $\gamma\in E-\bigcup_{\alpha\in\Phi}P_\alpha$，我們稱 γ 是正則，否則稱爲奇異。當 γ 是正則時，顯然 $\Phi=\Phi^+(\gamma)\cup-\Phi^+(\gamma)$。這將是我們現在所要考慮的情形。如果 $\alpha=\beta_1+\beta_2$, $\beta_1,\beta_2\in\Phi^+(\gamma)$, α 叫做可分解，不然就叫做不可分解。現在只要證明以下的命題就可以了。

定理　令 $\gamma\in E$ 是正則。那麼 $\Phi^+(\gamma)$ 中不可分解根之全體$\Delta(\gamma)$ 就是Φ的基底，而且每一基底都可由這樣的方式求得。

證明　這將分幾個步驟進行。

(1) 在 $\Phi^+(\gamma)$ 中的每一根是 $\Delta(\gamma)$ 的非負 $\mathbf{Z}$ 線性組合。假定有某一 $\alpha\in\Phi^+(\gamma)$ 不能寫成這種形式；選取 α 使得 (γ,α) 儘可能是最小。顯然 $\alpha\notin\Delta(\gamma)$，所以 $\alpha=\beta_1+\beta_2$ ($\beta_i\in\Phi^+(\gamma)$)，因此 $(\gamma,\alpha)=(\gamma,\beta_1)+(\gamma,\beta_2)$。但是 (γ,β_i) 中每一個是正的，所以 β_1 和 β_2 必須都是$\Delta(\gamma)$的一個非負的 $\mathbf{Z}$ 線性組合（否則必與 (γ,α) 的最小性不合），因此 α 也是這樣的形式，這就與上面的假定不合，所以上面的

主張就得證。

(2) 如果 $\alpha, \beta \in \Delta(\gamma)$ 而且 $\alpha \neq \beta$，那麼 $(\alpha,\beta) \leq 0$ 除非 $\alpha = \beta$。不然的話，$\alpha - \beta \in \Phi$ (引理 9.4)，因爲 β 顯然不是 $-\alpha$，所以 $\alpha - \beta$ 或 $\beta - \alpha \in \Phi^+(\gamma)$。在第一種情形下，$\alpha = \beta + (\alpha - \beta)$ 這是說 α 是可分解；在第二種情形下，$\beta = \alpha + (\beta - \alpha)$ 是可分解。這都與假設不合。

(3) $\Delta(\gamma)$ 是線性獨立集合。假定 $\sum r_\alpha \alpha = 0$ $(\alpha \in \Delta(\gamma), r_\alpha \in \mathbf{R})$。將正係數的項集中一起而且也將負係數的項集中在一起，我們能够有 $\sum s_\alpha \alpha = \sum t_\beta \beta$ $(s_\alpha, t_\beta > 0$，α 的集合和 β 的集合是不相交的)。令 $\varepsilon = \sum s_\alpha \alpha$。那麼由 (2) 得知 $(\varepsilon, \varepsilon) = \sum_{\alpha,\beta} s_\alpha t_\beta (\alpha, \beta) \leq 0$，所以 $\varepsilon = 0$。那麼 $0 = (\gamma, \varepsilon) = \sum s_\alpha (\gamma, \alpha)$，所以所有的 $s_\alpha = 0$。同理，所有的 $t_\beta = 0$。(這個論斷，事實上，證明任何落在 E 中某一超平面的同一側的向量集合，如果每兩向量的來角是鈍角時，則一定是線性獨立。)

(4) $\Delta(\gamma)$ 是 Φ 的一個基底。因爲 $\Phi = \Phi^+(\gamma) \cup -\Phi^+(\gamma)$，由(1)知 $(B2)$ 是滿足。由此也知 $\Delta(\gamma)$ 生成 E，再加上(3)就得 $(B1)$。

(5) 如果 Δ 是 Φ 的一個基底，那麼必存在某一正則的 $\gamma \in E$ 使得 $\Delta = \Delta(\gamma)$。給以 Δ，選取 $\gamma \in E$ 使得 $(\gamma, \alpha) > 0$ $\forall \alpha \in \Delta$。(這是可能的，因爲由 E 的任何基底而決定的「正」開半空間的全體的交集是非空的 (習題 7)。) 由 $(B2)$ 知 γ 是正則而且 $\Phi^+ \subset \Phi^+(\gamma)$，$\Phi^- \subset -\Phi^+(\gamma)$ (所以兩者都是相等)。因爲 $\Phi^+ = \Phi^+(\gamma)$，Δ 顯然是由不可分解元素所組成，卽，$\Delta \subset \Delta(\gamma)$。但是 $Card\,\Delta = Card\,\Delta(\gamma) = l$，所以 $\Delta = \Delta(\gamma)$。

現在我們介紹一些名詞，這將會是很有用的。超平面 $P_\alpha (\alpha \in \Phi)$ 把 E 分割成有限多個區域，$E - \bigcup_\alpha P_\alpha$ 的連通部分叫做 E 的 (開) Weyl 室。每一個正則的 $\gamma \in E$ 因此恰好屬於一個 Weyl 室，記爲 $\mathscr{C}(\gamma)$。我們說 $\mathscr{C}(\gamma) = \mathscr{C}(\gamma')$ 的意思是說 γ, γ' 落在每一個超平面 P_α

$(\alpha\in\Phi)$ 的同一側，卽$\Phi^+(\gamma)=\Phi^+(\gamma')$ 或 $\Delta(\gamma)=\Delta(\gamma')$。這證明了 Weyl 室和基底之間有一一對應。如果 $\Delta=\Delta(\gamma)$，記 $\mathscr{C}(\Delta)=\mathscr{C}(\gamma)$ 而且稱$\mathscr{C}(\Delta)$是關於Δ的基本 Weyl 室。$\mathscr{C}(\Delta)$是由E中滿足 $(\gamma,\alpha)>0\,(\alpha\in\Delta)$ 的一切γ所組成的開凸集（開半空間的交集）。在 $l=2$ 的情形下，我們很容易用圖表示；讀者可參考9.3.中的 A_2 型的圖。在此有六個 Weyl 室，有斜線的一個是關於基底 $\{\alpha,\beta\}$ 的基本 Weyl 室。

Weyl 羣顯然是把一個 Weyl 室送至另一個 Weyl 室：更明確地，$\sigma(\mathscr{C}(\gamma))=\mathscr{C}(\sigma(\gamma))$，在此 $\sigma\in\mathscr{W}$，γ 是正則。另一方面，$\mathscr{W}$ 對Φ所有的基底有排列作用。σ把Δ送至 $\sigma(\Delta)$，而 $\sigma(\Delta)$還是一個基底（爲什麼？）。$\mathscr{W}$的這兩種作用，事實上，和以上Weyl室跟基底間的對應是一致的；因爲 $(\sigma\gamma,\sigma\alpha)=(\gamma,\alpha)$，所以 $\sigma(\Delta(\gamma))=\Delta(\sigma\gamma)$。

10.2. 有關單根的引理

令Δ是的一個固定基底。我們將證明一些有關單根的性質的引理。

引理A 如果α是一個正根，但不是單根，那麼必存在某一$\beta\in\Delta$使得$\alpha-\beta$是一個根（必是正的）。

證明 如果 $(\alpha,\beta)\le 0\ \forall\,\beta\in\Delta$，那麼根據（10.1)中的步驟(3)的括弧裏的註解，我們得知$\Delta\cup\{\alpha\}$是一線性獨立集合。這是很荒謬的因爲Δ已是 E 的基底。所以存在某一$\beta\in\Delta$使得$\alpha-\beta\in\Phi$（因爲$\beta\neq c\alpha\ \forall\,c\in\mathbf{R}$，所以就可以應用引理 9.4 了）。記 $\alpha=\sum_{\gamma\in\Delta}k_\gamma\gamma$（所有的 $k_\gamma\ge 0$，一些 $k_\gamma>0,\gamma\neq\beta$）。$\alpha-\beta=\sum_{\gamma\neq\beta}k_\gamma\gamma+(k_\beta-1)\beta$ 中至少有一係數是正的。由（$B2$）中的表示的唯一性知$\alpha-\beta$中一切的係數都是正的，所以$\alpha-\beta$是正根。

系 每一$\beta\in\Phi^+$ 都能夠寫成 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots+\alpha_k$（$\alpha_i\in\Delta$，無須

相異的）在此方式下，每一部分和 $\alpha_1+\cdots\cdots+\alpha_i$ 是一個根。

證明 試利用引理以及對 $h_t\beta$ 做歸納。

引理 B 令 α 是一單根。那麼 σ_α 對 α 以外的正根有排列作用。

證明 令 $\beta\in\Phi^+-\{\alpha\}$, $\beta=\sum_{\gamma\in\Delta}k_\gamma\gamma$ $(k_\gamma\in Z^+)$。顯然 β 和 α 不成比例。所以存在 $\gamma\neq\alpha$ 使得 $k_\gamma\neq 0$。但 γ 在 $\sigma_\alpha(\beta)=\beta-<\beta,\alpha>\alpha$ 中的係數還是 k_γ。換句話說，$\sigma_\alpha(\beta)$ 至少有一正係數（關於 Δ），因而必是正的。不僅如此，$\sigma_\alpha(\beta)\neq\alpha$，因爲 α 是 $-\alpha$ 的像。

係 置 $\delta=\frac{1}{2}\sum_{\beta\succ 0}\beta$。那麼 $\sigma_\alpha(\delta)=\delta-\alpha\ \forall\ \alpha\in\Delta$

證明 顯然可由引理證得。

引理 C 令 $\alpha_1,\cdots\cdots,\alpha_t\in\Delta$（無須相異），記 $\sigma_i=\sigma_{\alpha_i}$。如果 $\sigma_1\cdots\cdots\sigma_{t-1}(\alpha_t)\prec 0$，那麼存在某一 s，$1\leq s\leq t$ 使得 $\sigma_1\cdots\cdots\sigma_t=\sigma_1\cdots\cdots\sigma_{s-1}\sigma_{s+1}\cdots\cdots\sigma_{t-1}$。

證明 記 $\beta_i=\sigma_{i+1}\cdots\cdots\sigma_{t-1}(\alpha_t)$, $0\leq i\leq t-2$., $\beta_{t-1}=\alpha_t$。因爲 $\beta_0\prec 0$ 而 $\beta_{t-1}\succ 0$，我們能够求得最小 s 使得 $\beta_s\succ 0$。於是 $\sigma_s(\beta_s)=\beta_{s-1}\prec 0$，因而由引理 B 知 $\beta_s=\alpha_s$。一般（引理 9.2），$\sigma\in\mathscr{W}$ 導致 $\sigma_{\sigma(\alpha)}=\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}$，特別，我們得 $\sigma_s=(\sigma_{s+1}\cdots\cdots\sigma_{t-1})\sigma_t(\sigma_{t-1}\cdots\cdots\sigma_{s+1})$ 因而引理得證。

系 對於 $\sigma\in\mathscr{W}$，如果能表成 $\sigma=\sigma_1\cdots\cdots\sigma_t$ 其中 σ_i 是對應於單根的鏡射而且 t 是儘可能小，那麼 $\sigma(\alpha_t)\prec 0$。

10.3. Weyl 羣

現在我們可以證明$\mathscr{W}$對於的基底（或是 Weyl 室）的排列作用是有單傳遞性的而且對於 Φ 的任何基底 Δ，$\mathscr{W}$ 是由「單鏡射」(即 σ_α, $\sigma\in\Delta$）生成的。

定理 令 Δ 是 Φ 的一個基底。

(a) 如果 $\gamma\in E$ 是正則的，則存在 $\sigma\in\mathscr{W}$ 使得對一切 $\alpha\ni\Delta$,

$(\sigma(\gamma),\alpha)>0$（所以$\mathscr{W}$在 Weyl 室上的作用是傳遞的）。

(b) 如果Δ'是Φ的另一個基底，則必存在$\sigma\in\mathscr{W}$使得 $\sigma(\Delta')=\Delta$（所以$\mathscr{W}$在基底上的作用是傳遞的）。

(c) 如果α是任意根，則存在$\sigma\in\mathscr{W}$使得 $\sigma(\alpha)\in\Delta$

(d) $\mathscr{W}$是由一切的 $\sigma_\alpha(\alpha\in\Delta)$ 所生成的。

(e) 如果 $\sigma(\Delta)=\Delta$, $\sigma\in\mathscr{W}$，則 $\sigma=1$（所以$\mathscr{W}$在基底上的作用是有單傳遞性的）。

證明 令$\mathscr{W}'$是由$\mathscr{W}$中一切 $\sigma_\alpha(\alpha\in\Delta)$ 生成的子羣。我們將證明對於$\mathscr{W}'$, (a)-(c) 成立，然後由此證明$\mathscr{W}'=\mathscr{W}$

(a) 記 $\delta=\frac{1}{2}\sum\limits_{\alpha>0}\alpha$ 並且選擇$\sigma\in\mathscr{W}'$ 使得 $(\sigma(\gamma),\delta)$ 儘可能是最大。如果α是單根，則 $\sigma_\alpha\sigma\in\mathscr{W}'$，由於$\sigma$的選擇，得知$(\sigma(\gamma),\gamma)\geq(\sigma_\alpha\sigma(\gamma),\delta)=(\sigma(\gamma),\sigma_\alpha(\delta))=(\sigma(\gamma),\delta-\alpha)=(\sigma(\gamma),\delta)-(\sigma(\gamma),\alpha)$（引理 10.2$B$ 的系）。所以 $(\sigma(\gamma),\alpha)\geq 0\ \forall\alpha\in\Delta$。因爲$\gamma$是正則，所以$(\sigma(\gamma),\alpha)\neq 0\ \forall\alpha\in\Delta$，否則$\gamma$和某一$\sigma^{-1}\alpha$ 正交這是矛盾的。所以 $(\sigma(\gamma),\alpha)>0\ \forall\alpha\ni\Delta$。所以 $\sigma(\gamma)$ 落在基本 Weyl 室 $\mathscr{C}(\Delta)$ 中而且 $\sigma(\mathscr{C}(\gamma))=\mathscr{C}(\sigma(\gamma))=\mathscr{C}(\Delta)$ 故得證。

(b) 由 (a) 知$\mathscr{W}'$對於 Weyl 室有排列作用所以對Φ的基底也有排列作用（傳遞性的）。

(c) 由 (b) 知只要證明每一個根至少屬於一個基底就可以了。因爲與α成比例的根必是$\pm\alpha$，所以超平面 $P_\beta(\beta\neq\pm\alpha)$ 和 P_α 相異，因而存在$\gamma\in P_\alpha$, $\gamma\notin P_\beta$（一切的$\beta\neq\pm\alpha$）（爲什麼？）。選取γ'足够接近γ使得$(\gamma',\alpha)=\varepsilon>0$而$|(\gamma',\beta)|>\varepsilon\ \forall\beta\neq\pm\alpha$。顯然$\alpha\in\Delta(\gamma')$。

(d) 爲了證明 $\mathscr{W}'=\mathscr{W}$我們只要證明每一個鏡射 σ_α $(\alpha\in\Phi)\in\mathscr{W}'$。利用 (c)，可求得$\sigma\in\mathscr{W}'$使得$\beta=\sigma(\alpha)\in\Delta$。於是 $\sigma_\beta=\sigma_{\sigma(\alpha)}$

$=\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}$，所以 $\sigma_\alpha=\sigma^{-1}\sigma_\beta\sigma\in\mathscr{W}'$。

(e) 令 $\sigma(\Delta)=\Delta$，但是$\sigma\neq 1$。如果σ表成單鏡射的最短乘積（由(d) 我們知道這是可能的），就說是 $\sigma=\sigma_1\cdots\cdots\sigma_t$，那麼由引理 10.2c 的系知 $\sigma(\alpha_t)\prec 0$這與假設不合，所以$\sigma=1$。

利用 (10.2) 的引理我們能夠看出$\mathscr{W}$可由單鏡射生成這一事實的重要意義。

當$\sigma\in\mathscr{W}$寫成$\sigma_{\alpha_1}\cdots\cdots\sigma_{\alpha_t}$ $\alpha_i\in\Delta$ t 是最小時，我們稱此表現是減縮的，而且記 $l(\sigma)=t$；這是σ關於Δ的長度。由定義 $l(1)=0$。如下，我們能够用另一種方式表示長度。定義 $n(\sigma)=\#\{\alpha\succ 0\mid\sigma(\alpha)\prec 0\}$。

引理 A 對於一切的$\sigma\in\mathscr{W}$, $l(\sigma)=n(\sigma)$。

證明 利用數學歸納法。如果 $l(\sigma)=0$，則$\sigma=1$，所以 $n(\sigma)=0$因而 $l(\sigma)=n(\sigma)$。假定引理對於一切的$\tau\in\mathscr{W}$, $l(\tau)<l(\sigma)$ 都是成立。將σ寫成減縮的形式$\sigma=\sigma_{\alpha_1}\cdots\cdots\sigma_{\alpha_t}$，並且置$\alpha=\alpha_t$。由引理 10.2C 的系，$\sigma(\alpha)\prec 0$。於是由引理 10.2B 知$n(\sigma\sigma_\alpha)=n(\sigma)-1$。他方面 $l(\sigma\sigma_\alpha)=l(\sigma)-1<l(\sigma)$，所以依歸納法假設。 $l(\sigma\sigma_\alpha)=n(\sigma\sigma_\alpha)$ 因而 $l(\sigma)=n(\sigma)$。

其次，我們要更仔細地檢驗$\mathscr{W}$在 Weyl 室上的單傳遞性作用（定理 10.3(a),(c)）。下一個引理將證明關於Δ的基本 Weyl 室的閉包$\mathscr{C}(\Delta)$正是$\mathscr{W}$在E上的作用的基本領域，即，E中任何向量在$\mathscr{W}$的作用下恰好對應於$\mathscr{C}(\Delta)$中的一個點。

引理 B 令$\gamma\in\mathscr{C}(\Delta)$。那麼$\sigma\gamma\prec\gamma$ $\forall\sigma\in\mathscr{W}$。如果$\gamma\in\mathscr{C}(\Delta)$，那麼只當$\sigma=1$時 $\sigma(\gamma)=\gamma$.

證明 我們可以假定$\sigma\neq 1$。將σ表成減縮形式$\sigma=\sigma_{i(1)}\cdots\cdots\sigma_{i(t)}$，在此 $\sigma_i=\sigma_{\alpha_i}$, $\Delta=\{\alpha_1,\cdots\cdots,\alpha_t\}$。顯然，$\sigma^{-1}$ 中的每一部分積 $\sigma_{i(t)}\cdots\cdots\sigma_{i(s)}(1\leq s\leq t)$ 也是減縮形式，所以由引理 10.2C 的系知

$\sigma_{i(t)}\cdots\cdots\sigma_{i(s+1)}\succ 0$。由於內積在$\mathscr{W}$的作用下保持不變，所以我們能够有 $(\sigma_{i(s+1)}\cdots\cdots\sigma_{i(t)}(\gamma),\sigma_{i(s)})=(\gamma,\sigma_{i(t)}\cdots\cdots\sigma_{i(s+1)}\alpha_{i(s)})>0$。換句話說，$\sigma\gamma$是由$\gamma$減去 $\alpha_{i(t)},\alpha_{i(t-1)},\cdots\cdots,\alpha_{i(1)}$ 的適當倍數而得的；所以 $\sigma\gamma\prec\gamma$。這論斷也證明了如果 $\sigma\gamma=\gamma$，則 $\sigma_{i(t)}\gamma=\gamma$ 或 $(\gamma,\alpha_{i(t)})=0$，因此 $\gamma\notin\mathscr{C}(\Delta)$。

10.4. 既約的根系

如果Φ不能寫成兩個互相正交的眞子集的聯集時Φ叫做既約的根系。(在(9.3)中，A_1,A_2,B_2,G_2 是既約，然而 $A_1\times A_1$ 不是既約。）假定Δ是 Φ 的基底。我們主張 Φ 是既約當且僅當Δ是既約，即Δ不可能寫成 $\Delta_1\cup\Delta_2$，其中 $\phi\neq\Delta_i\neq\Delta$而且$(\Delta_1,\Delta_2)=0$。先證「充分性」，令 $\Phi=\Phi_1\cup\Phi_2,\Phi_i\neq\Phi$ 而且 $(\Phi_1,\Phi_2)=0$。除非Δ包含於 Φ_1 或 Φ_2 中，否則我們必能將Δ分割，但是如果 $\Delta\subset\Phi_1$ 就得 $(\Delta,\Phi_2)=0$ 或 $(E,\Phi)=0$(因爲Δ生成E)。然而這是不可能的因爲 $(,)$ 是非退化的。反之，令Φ是既約，而$\Delta=\Delta_1\cup\Delta_2$，其中$(\Delta_1,\Delta_2)=0$。由定理10.3(c)我們可以定義$\Phi_i=\{\gamma\in\Phi\,|\,\mathsf{E}\sigma\in\mathscr{W}$使得 $\sigma(\gamma)\in\Delta_i\}$，$i=1,2$。所以$\Phi=\Phi_1\cup\Phi_2$。記住如果$(\alpha,\beta)=0$就得 $\sigma_\alpha\sigma_\beta=\sigma_\beta\sigma_\alpha$。因爲$\mathscr{W}$是由 $\sigma_\alpha(\alpha\in\Delta)$ 生成的，由鏡射的公式知 Φ_i 中的每一個根都是由 Δ_i 中的某一個減去或加上 Δ_i 中元素的適當倍數。所以 Φ_i 落在E中由 Δ_i 生成的子空間 E_i內，因而$(\Phi_1,\Phi_2)=0$。所以$\Phi_1=\phi$或$\Phi_2=\phi$，因此$\Delta_1=\phi$或$\Delta_2=\phi$

引理 A 令Φ是既約。關於偏序$\prec$來說必存在唯一最大根β（特別，如果$\alpha\neq\beta$就得$ht\,\alpha<ht\,\beta$，而且 $(\beta,\alpha)\geq 0\ \forall\,\alpha\in\Delta$）。如果 $\beta=\sum\limits_\alpha k_\alpha\alpha(\alpha\in\Delta)$ 那麼一切的 $k_\alpha>0$

證明 令$\beta=\sum k_\alpha\alpha(\alpha\in\Delta)$關於「$\prec$」是最大；顯然$\beta\succ 0$如果 $\Delta_1=\{\alpha\in\Delta\,|\,k_\alpha\alpha>0\}$ 而且 $\Delta_2=\{\alpha\in\Delta\,|\,k_\alpha=0\}$，那麼$\Delta=\Delta_1\cup\Delta_2$

是一分割。假定$\Delta_2 \neq \phi$。那麼 $(\alpha,\beta) \leq 0 \ \forall \alpha \in \Delta_2$ （引理10.1）；因爲Φ是既約，所以至少存在一個 $\alpha \in \Delta_2, (\alpha, \Delta_1) \neq 0$。因而至少存在 $\alpha' \in \Delta_1$ 使得$(\alpha,\alpha')<0$。於是 $(\alpha,\beta)<0$。這就得 $\alpha+\beta \in \Phi$（引理 9.4 ）因而和β的最大性質不合。所以$\Delta_2 = \phi$而且一切的$k_\alpha > 0$。這個論斷的證明了 $(\alpha,\beta) \geq 0 \ \forall \alpha \in \Delta$ （至少有一α 使得$(\alpha,\beta)>0$蓋因爲Δ生成E之故）。現在合 β' 是另一個最大根。前面的討論都適用於 β'，所以 β' 中至少有一α（正係數）使得$(\alpha,\beta)>0$。所以 $(\beta,\beta')>0$，因而當$\beta \neq \beta'$ 時 $\beta-\beta' \in \Phi$。但是如果$\beta-\beta' \in \Phi$，則 $\beta \prec \beta'$ 或 $\beta' \prec \beta$。這都是荒謬的。所以β是唯一的。

引理B. 令 Φ 是既約的。那麼$\mathscr{W}$在 E 上的作用是既約的。特別，根α的$\mathscr{W}$-軌道能衍生整個E

證明 一個根的$\mathscr{W}$-軌道在E中生成一個非零$\mathscr{W}$-不變子空間，所以第二個主張可由第一個主張推論而得。至於第一個主張我們令E'是E中的一個 $\mathscr{W}$-不變子空間。E' 的正交餘 E'' 也是$\mathscr{W}$-不變而且$E=E'\oplus E''$。如果$\alpha \in \Phi$，則$\alpha \in E'$ 或 $E' \subset P_\alpha$，蓋因 $\sigma_\alpha(E')=E'$之故（習題 9.1）。因此如果$\alpha \notin E'$ 就得 $\alpha \in E''$，所以Φ的每一根落在 E' 或 E'' 中。這就把Φ分割成兩個互相正交的子集合，所以必有一個是空集合。因爲Φ生成E，我們結論$E'=E$

引理C. 令Φ是既約的。那麼Φ的根至多有兩種長度而且長度相同的根在$\mathscr{W}$ 的作用下是共軛的（即其中一個必在另一個的$\mathscr{W}$-軌道中。）

證明。如果α，β是任意根，因爲 $\sigma(\alpha)(\sigma \in \mathscr{W})$ 生成E（引理B），所以不可能一切的 $\sigma(\alpha)$ 都和β是正交。如果$(\alpha,\beta)\neq 0$，我們知道（參考(9.4)）α，β的長度平方比可能是 1, 2, 3, 1/2, 1/3。現在如果出現三種根長度，那麼必出現比值 3/2 這是不合的。令α，β有相同的長度。如上，只要將其中的一個換成其$\mathscr{W}$-共軛，就可以假

定此兩者不是正交（並且是相異：否則得證！）。根據（9.4)，這就得 $<\alpha,\beta>=<\beta,\alpha>=\pm 1$。如有必要，我們將 β 換成 $-\beta=\sigma_\beta(\beta)$，我們可以假定 $<\alpha,\beta>=1$。因此，$(\sigma_\alpha\sigma_\beta\sigma_\alpha)(\beta)=\sigma_\alpha\sigma_\beta(\beta-\alpha)=\sigma_\alpha(-\beta-\alpha+\beta)=\alpha$。

一旦 Φ 是既約而又有兩種不同的根長度，我們就說一個是長根，另一個是短根。（如果一切根都是同長度，為了方便就稱他們是長根。）

引理D. 令 Φ 是既約的而又有兩相異的根長。那麼引理 A 中的最大根 β 是一個長根。

證明。令 $\alpha\in\Phi$ 是任意的。只要證明 $(\beta,\beta)\geq(\alpha,\alpha)$ 就可以了。為此之故，我們可以用 α 在 $\mathscr{C}(\Delta)$ 中 α 的 $\mathscr{W}$ 共軛取代 α。因為 $\beta-\alpha\succ 0$（引理 A），我們知道 $(\gamma,\beta-\alpha)\geq 0\ \forall\gamma\in\mathscr{C}(\Delta)$。現在分別以 $\gamma=\beta$ 和 $\gamma=\alpha$ 代入上式就得 $(\beta,\beta)\geq(\beta,\alpha)\geq(\alpha,\alpha)$。

習　題

1. 令 $\Phi^\vee$ 是 Φ 的對偶系。$\Delta^\vee=\{\alpha^\vee|\alpha\in\Delta\}$ 試證 $\Delta^\vee$ 是 $\Phi^\vee$ 的基底。（觀察每一個單鏡射在 $\Delta^\vee$ 的一個元素上的作用並且利用定理10.3.）

2. 如果 Δ 是 Φ 的一個基底，試證集合 $(Z\alpha+Z\beta)\cap\Phi$ $(\alpha\neq\beta\in\Delta)$ 是在 E 中由 α，β 生成的子空間的一個根系（參考習題 9.7）。試推廣至 Δ 的任意子集合。

3. 試證凡是秩 2 的每一個根都和列在（9.3)中的某一個同構。

4. 試對 G_2 直接證明引理 10.2A 的系。

5. 如果 $\sigma\in\mathscr{W}$ 能够寫成 t 個單鏡射的一個乘積，試證 t 和 $l(\sigma)$ 或者同為奇數或者同為偶數。

6. 定義一函數 $sn:\mathscr{W}\longrightarrow\{\pm 1\}$ 為 $sn(\sigma)=(-1)^{l(\sigma)}$。試證 sn 是一個同態（參考 A_2 的情形，在此 $\mathscr{W}$ 和對稱羣 S_3 是同構）。

7. 試證由 E 的任何基底 $\gamma_1,\cdots\cdots,\gamma_l$，所決定的「正」開半空

間的交集是非空的。（令 δ_i 是 γ_i 在 $\gamma_1, \cdots\cdots, \gamma_{i-1}, \gamma_{i+1}, \cdots\cdots, \gamma_l$ 生成子空間上的投影。則 $\gamma = \sum_{i=1}^{l} \gamma_i \ \delta_i$ 當所有的 $\gamma_i > 0$ 時是在所求的交集中。）

8. 令Δ Φ是的一基底，$\alpha \neq \beta \in \Delta$，$\Phi_{\beta\alpha}$是$E_{\alpha\beta} = \mathbf{R}_\alpha + \mathbf{R}_\beta$ 中的根系（參考以上的習題2）。$\Phi_{\alpha\beta}$ 的 Weyl 羣 $\mathscr{W}_{\alpha\beta}$ 是由 $\tau_\alpha = \sigma_\alpha|_{E_{\alpha\beta}}$, $\tau_\beta = \sigma_\beta|_{E_{\alpha\beta}}$ 生成的而且 $\mathscr{W}_{\alpha\beta}$ 可以看成$\mathscr{W}$的子羣。試證 $\mathscr{W}_{\alpha\beta}$ 的元素的「長度」（關於 τ_α, τ_β）和$\mathscr{W}$中對應的元素的長度是一致的。

9. 試證$\mathscr{W}$中有一唯一的元素 σ 將Φ^+送至Φ^-（關於Δ） 試證 σ 的任何減縮的表示必包括一切 $\sigma_\alpha(\alpha \in \Delta)$。試討論 $l(\sigma)$。

10. 在Φ中令 $\Delta = \{\alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_l\}$，又令 $\lambda = \sum_{i=1}^{l} k_i \alpha_i$ （$k_i \in \mathbf{Z}$, 一切的$k_i \geq 0$ 或≤ 0）。試證 λ 是某一根的一個倍數（可能是0）或者存在 $\sigma \in \mathscr{W}$ 使得 $\sigma\lambda = \sum_{i=1}^{l} k_i' \alpha_i$, 其中一些 $k_i' > 0$ 而且一些 $k_i' < 0$。〔粗略的證明：如果 λ 不是任何根的倍數，那麼超平面 $P_\lambda \subsetneq \bigcup_{\alpha \in \Phi} P_\alpha$。取 $\mu \in P_\lambda - \bigcup_{\alpha \in \Phi} P_\alpha$。然後求 $\sigma \in \mathscr{W}$ 使得一切的 $(\alpha_i, \sigma_\mu) > 0$。於是 $0 = (\lambda, \mu) = (\sigma\lambda, \sigma\mu) = \sum k_i(\alpha_i, \sigma\mu)$。〕

11. 設Φ是既約的。試證 $\Phi^\vee$ 也是既約的。如果Φ的根都是同長度，那麼 $\Phi^\vee$ 也是一樣（因而在 $\Phi^\vee$ 和 $\Phi^\vee$ 是同構）。他方面，如果Φ有兩種根長，那麼 $\Phi^\vee$ 也是一樣；但是如果 α 是長根，那麼 $\alpha^\vee$ 是短根（反之亦然）。利用此事實試證 Φ 有唯一的最短根（關於Δ所定義的偏序）

12. 設Φ是既約的。試利用引理 10. 3B, 10. 4C 證明Φ有唯一的最大長根及最大短根。

13. 試證 $\sigma_\alpha(\alpha \in \Phi)$ 是$\mathscr{W}$中僅有的鏡射。〔在鏡射的超平面中的向量如果不和任何根正交時，就只有被$\mathscr{W}$中的元所固定。〕

附　註

這一節中的內容是由 Serre〔2〕中的內容演繹出來。

11. 分　類

在這一節中Φ表示一個根系，$\mathscr{W}$是它的 Weyl 羣，Δ是Φ的一個基底而且 $Card\,\Delta = l$

11.1. Φ的 Cartan 矩陣

固定單根的次序如 $(\alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_l)$。矩陣 $(<\alpha_i, \alpha_j>)$ 叫做Φ的 Cartan 矩陣。它的成分叫做 Cartan 整數。譬如 $l = 2$ 時的矩陣是:

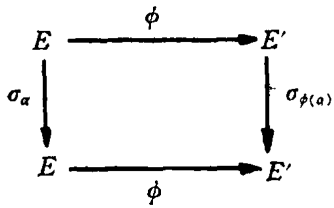
$$A_1\times A_1\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; A_2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; B_2\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; G_2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}。$$

當然，矩陣是和選定的次序相關，但這並不很重要。重要的是Cartan 矩陣是和Δ的選擇無關，這可由定理 10.3(b) 看出。正如 (8.5)，Cartan 矩陣是非奇異的因爲Δ 是Φ 的基底之故。結果，我們能證明 Cartan 矩陣能够完全地決定Φ。

命題　令 $\Phi'\subset E'$ 爲另一個根系而且以 $\Delta'=\{\alpha_1', \cdots\cdots, \alpha_l'\}$ 爲基底。如果 $<\alpha_i, \alpha_j>=<\alpha_i', \alpha_j'>$ $\forall\, 1\leq i$，$j\leq l$，那麼對射 $\alpha_i \longrightarrow \alpha'$ 可唯一地擴張成一個同構 $\phi: E\rightarrow E'$ 把Φ 送至 Φ' 而且滿足 $<\phi(\alpha), \phi(\beta)>=<\alpha, \beta>$ $\forall\,\alpha$，$\beta\in\Phi$。因此Φ的 Cartan 矩陣在同構下決定了Φ。

證明　因爲 Δ, Δ' 分別是 E, E'，的基底，所以有一唯一的向量空間的同構 $\phi: E\longrightarrow E'$ 把 α_i 送至 α_i' $\forall_i(1\leq i\leq l)$。如果α，$\beta \in\Delta$，定理的假設保證 $\sigma_{\phi(\alpha)}(\phi(\beta))= \sigma_{\alpha'}(\beta')=\beta'-<\beta', \alpha'>\alpha'=\phi(\beta)-<\beta, \alpha>\phi(\alpha)=\phi(\beta-<\beta, \alpha>\alpha)=\phi(\sigma_\alpha(\beta))$。換句話說，對

任意$\alpha\in\Delta$，以下的圖是交換的:



Φ和 Φ' 的 Weyl 羣 $\mathscr{W},\mathscr{W}'$ 是由單鏡射生成（定理 10.3(d)），所以映射 $\sigma\longrightarrow\phi\circ\sigma\circ\phi^{-1}$ 是$\mathscr{W}$和$\mathscr{W}'$之間的一個同構把 σ_α 送至 $\sigma_{\phi(\alpha)}(\alpha\in\Delta)$。但是每一$\beta\in\Phi$在$\mathscr{W}$的作用下都對應到某一單根（定理10.3(c)），我們就說$\beta=\sigma(\alpha)(\alpha\in\Delta)$。結果這使得$\phi(\beta)=(\phi\circ\sigma\circ\phi^{-1})(\phi(\alpha))\in\Phi'$。所以 ϕ 把Φ送至 Φ' 上，不僅如此，鏡射的公式證明了ϕ保持一切的 Cartan 整數。

此命題證明了一件事，那就是由於對 Cartan 整數的認知而重新獲得Φ是可能的。事實上，要設計一個能寫下所有根（或只是所有正根）的實用方法並不是很困難的。可能最好的方法是考慮根鏈(9.4)。由高度1的根亦卽單根開始。對於任何根對 $\alpha_i\neq\alpha_j$，過 α_i 的 α_j-根鏈的整數 $r=0$ （卽 $\alpha_i-\alpha_j$ 不是一個根（引理 10.1）），所以整數$q=-\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle$。這使我們能够寫下高度 2 的所有根$\alpha$，因而一切整數$\langle\alpha,\alpha_j\rangle$。對於高度是2的每一根 α，過 α的 α_j- 根鏈的整數r能够容易求得，蓋因 α_j 最多只能被減一次（爲什麼？）因而 q 可由 $r-q=\langle\alpha,\alpha_j\rangle$求得。引理 10.2A 的系保證了一件事，那就是如果我們重覆這樣的過程，在足够多次之後，必能得到正根的全體。

11.2. Coxeter 圖與 Dynkin 圖示

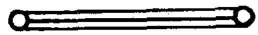
如果α，β 是相異的兩正根，那麼$\langle\alpha,\beta\rangle\langle\beta,\alpha\rangle=0$，1，2或

3 (9. 4)。定義Φ的 Coxeter 圖爲一具有 l 個頂點而且第 i 個點和第 j 個點 $(i\neq j)$ 之間接有 $\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle\langle\alpha_j,\alpha_i\rangle$ 個稜的圖。譬如:

$A_1\times A_1$ 

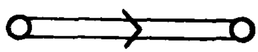
A_2 

B_2 

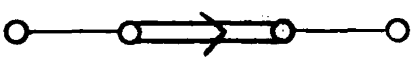
G_2 

當所有的根的長度都是一樣時，Coxeter 圖能決定所有的數 $\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle$，蓋因 $\langle\alpha_j,\alpha_i\rangle=\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle$ 之故。如果有兩種以上的根長（如 B_2 或 G_2），則 Coxeter 圖就無法告訴我們一對頂點中那一點是對應於短根，那一點是對應於長根（此時，點是由二或三個稜連接）。（然而我們能够證明 Coxeter 圖可以完全地決定 Weyl 羣，這是因爲 Coxeter圖能決定 $\mathscr{W}$ 的生成元的乘積的階數之故，參考習題 9. 3)

一旦在Φ的 Coxeter 圖中出現二個或三個稜時，我們能够在兩個根之間加上一個指向較短根的箭頭。這個多出來的資料容許我們復得 Cartan 整數；我們稱所得的圖是Φ的 Dynkin 圖。（如前，這決定於單根的號碼。）譬如:

B_2 

G_2 

另一個例子：給以一個圖  （結果

這正好是和 F_4 的根系相關聯），讀者能容易地復得 Cartan 矩陣

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

11.3. 既約成分

記得在(10.4)中曾證明Φ是既約的充分必要條件是Φ（或等於是△）不能分成兩個正交的眞子集合。顯然，Φ是既約的充分必要條件是它的Coxeter圖是連通的（在一般的意味下）。一般而言，Coxeter圖會有好幾個連通成分；令 $\Delta=\Delta_1\cup\cdots\cdots\cup\Delta_t$ 是△的相應分割，其中 $(\Delta_i,\Delta_j)=0\ \forall\, i\neq j$。如果 E_i 是由 Δ_i 生成的，顯然 $E=E_1\oplus\cdots\cdots\oplus E_t$（正交直和）而且 Δ_i 的整線性組合和Φ的交集（此集合叫做 Φ_i）顯然形成 E_i 中的一個根系，它的 Weyl 羣是在$\mathscr{W}$中由一切的 $\sigma_\alpha|_{E_i}$ $(\alpha\in\Delta_i)$ 生成的子羣。最後，每一 E_i 是$\mathscr{W}$-不變的（因爲如果 $\alpha\notin\Delta_i$ 那麼 σ_α 在 E_i 的作用是自明的），所以習題9.1 所需的論斷也立即證明每一根落在某一個 E_i 中，即 $\Phi=\Phi_1\cup\cdots\cdots\cup\Phi_t$

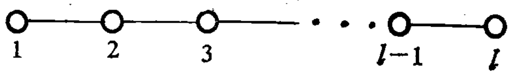
命題。Φ（唯一地）分解成爲既約根系Φ_i（在E的子空間 E_i 中）的聯集使得$E=E_1\oplus\cdots\cdots\oplus E_t$（正交直和）。

11.4. 分類定理

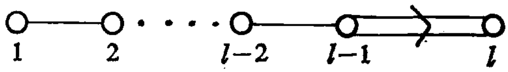
在（11.3）中的討論說明了一件事，那就是我們只要分類既約根系，或者說連通的 Dynkin 圖就可以了（參考命題11.1）。

定理。如果Φ是秩 l 的既約根系，那麼它的 Dynkin 圖必是以下的某一種（每一種情形都有 l 個頂點）：

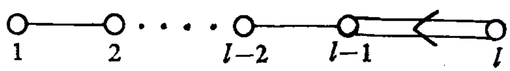
$A_l(l\geq 1)$:



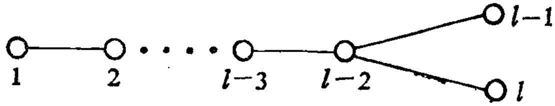
$B_l(l\geq 2)$:



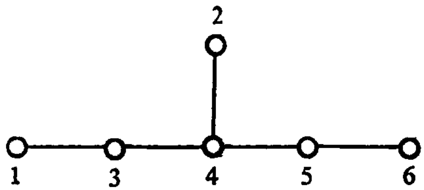
$C_l(l\geq 3)$:



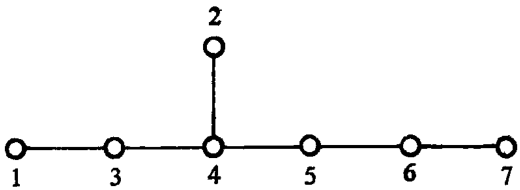
$D_l(l\geq 4)$:



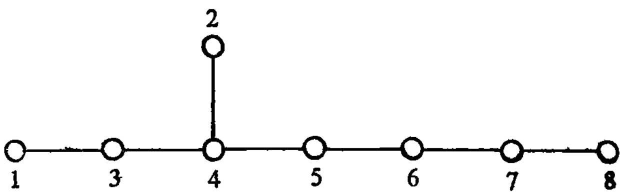
E_6:



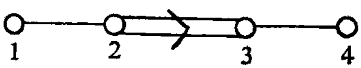
E_7:



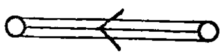
E_8:



F_4:



G_2:



對於 A_l-D_l 等型我們爲了避免重複起見，故對 l 加以限制。關於所標定號數的單根其對應的 Cartan 整數可參考表一。在調查上列的 Dynkin 圖時顯示出除了 B_l, C_l 以外其他所有的情形，Dynkin 圖都能由 Coxeter 圖推論而得。然而，B_l 和 C_l 都是來自同一 Coxeter 圖，而只是長根和短根的號數不一樣而已。（這兩個根系，事實上，是互爲對偶，參考習題 5）。

定理的證明。主要的想法是先分類可能的 Caxeter 圖（忽略根的相對長度），然後再看看能得到什麼樣的 Dynlsin 圖。所以我們只將一些基本歐氏幾何應用到有限向量集合上，其中兩個向量間的夾角是由Coxeter 圖決定的。因爲我們忽略長度，所以現階段只考慮單位向量的集合是較容易。爲了能够有較大的彈性之故我們只做了以下的假設：E是歐氏空間（任意維數），$\mathscr{A}=\{\varepsilon_1, \cdots\cdots, \varepsilon_n\}$是 n 個線性獨立單位向量集它滿足了 $(\varepsilon_i, \varepsilon_j)\leq 0\ (i\neq j)$ 以及 $4(\varepsilon_i, \varepsilon_j)^2=0, 1, 2,$ 或 3 $(i\neq j)$。這樣的向量集合（爲了簡單起見）叫做容許集。（譬如：把根系的基底元素除以各別的長度而得的集合。）我們對集合$\mathscr{A}$附上一圖Γ其做法正如我們在上面對根系的單根所做的一樣，其中第 i 個頂點和第 j 個頂點之間 $(i\neq j)$ 用 $4(\varepsilon_i, \varepsilon_j)^2$ 個稜相接。現在我們的工作是決定和向量的容許集相關的一切連通圖（這包括所有的 Coxeter 圖）。我們分成幾個步驟進行，其中第一步是顯然的（在較後的步驟中我們才假設連通性。）

(1) 如果$\mathscr{A}$中去掉某些 ε_i，則其餘的還是形成一個容許集，它圖是的由Γ中省略相應的點以及一切與這些點相接合的稜。

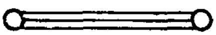
(2) 在Γ中至少有一稜相連的頂點對之個數是道地的小於 n。置 $\varepsilon=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i$ 。因爲 $\{\varepsilon_1, \cdots\cdots, \varepsilon_n\}$是線性獨立，$\varepsilon\neq 0$所以$0<(\varepsilon, \varepsilon)=n+2\sum_{i<j}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$。令 i，j 是一對相異的腳碼使得 $(\varepsilon_i, \varepsilon_j)\neq 0$（即，令 i 第 j 個和第 j 個頂點相連）。於是$4(\varepsilon_i, \varepsilon_j)^2=1, 2,$ 或 3，所以特

別 $2(\varepsilon_i,\varepsilon_j)\leq -1$。由以上的不等式可看出這種點對的個數不能超過 $n-1$。

(3) Γ不能够包含任何循環。如果有這樣的循環，則此循環會是$\mathscr{A}$的容許子集$\mathscr{A}'$的圖（參考(1)），因而 Γ' 會違反 (2)，其中n換成 $Card\,\mathscr{A}'$

(4) 以Γ的任一個頂點爲始的稜最多不超過三個。我們就說 $\varepsilon\in\mathscr{A}$，而且 $\eta_1,\cdots\cdots,\eta_k$ 是$\mathscr{A}$中與 ε 相連的向量（其連接的稜各別都是 1，2或3），即 $(\varepsilon,\eta_i)<0$，其中 $\varepsilon,\eta_1,\cdots\cdots,\eta_k$ 都是相異的。由 (3) 知$\eta_1,\cdots\cdots,\eta_k$中任兩個都不相連，所以對於 $i\neq j$，$(\eta_i,\eta_j)=0$。因爲$\mathscr{A}$是線性獨立，所以在由 ε，$\eta_1,\cdots\cdots$，η_k 所生成的子空間有一向量 η_0 與 $\eta_1,\cdots\cdots,\eta_k$ 之全體都是正交；顯然 $(\varepsilon,\eta_0)\neq 0$。現在 $\varepsilon=\sum_{i=0}^{k}(\varepsilon,\eta_i)\eta_i$，所以 $1=(\varepsilon,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{k}(\varepsilon,\eta_i)^2$。這使得 $\sum_{i=0}^{k}(\varepsilon,\eta_i)^2<1$ 或者說。$\sum_{i=1}^{k}4(\varepsilon,\eta_i)^2<4$。但是 $4(\varepsilon,\eta_i)^2$ 是 η_i 連接 ε 的稜數，故得證。

(5) 一個容許集合$\mathscr{A}$的連通圖如果會包含一個三稜的必是



（G_2 的Coxeter 圖）。這可由 (4) 直接證得。

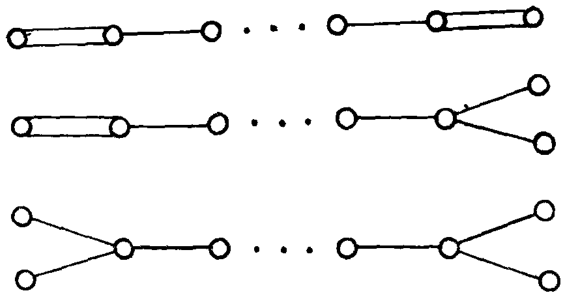
(6) 令$\{\varepsilon_1,\cdots\cdots,\varepsilon_k\}\subset\mathscr{A}$有子圖



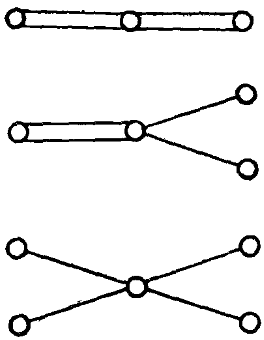
（Γ中的單鏈）。如果$\mathscr{A}'=(\{\mathscr{A}-\{\varepsilon_1,\cdots\cdots,\varepsilon_k\}\})\cup\{\varepsilon\}$，$\varepsilon=\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i$，那麼 $\mathscr{A}'$ 是一個容許集合。（$\mathscr{A}'$ 的圖是將Γ中的單鏈縮成一點而得的。）$\mathscr{A}'$顯然是線性獨立。由假設，$2(\varepsilon_i,\varepsilon_{i+1})=-1$ $(1\leq i\leq k-1)$，所以 $(\varepsilon,\varepsilon)=k+2\sum_{i<j}(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=k-(k-1)=1$。所以 ε 是一單位向量。由 (3) 知任何 $\eta\in\mathscr{A}-\{\varepsilon_1,\cdots\cdots,\varepsilon_k\}$最多只能和一個 ε_i，$1\leq i\leq k$ 相連，所以 $(\eta,\varepsilon)=0$ 或 $(\eta,\varepsilon)=(\eta,\varepsilon_i)$，$1\leq i\leq h$。不

論那一種情形，$4(\eta,\varepsilon)^2=0,1,2$，或 3

(7) Γ不包含以下的子圖:

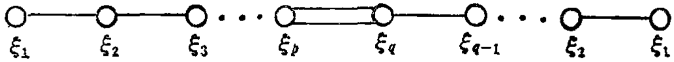


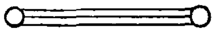
假定Γ包含以上某一個子圖；由 (1) 知其爲容許集合的圖。但是 (6) 使我們能够在每一種情形中用一頂點代替單鏈，所以就得以下的圖因而違反 (4)。

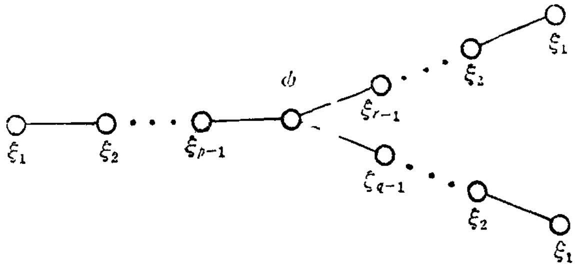


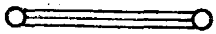
(8) 一容許集合的連通圖必是以下的一種:





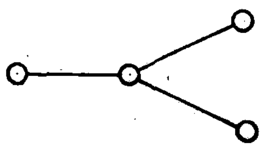




事實上，由 (5) 知只有  包含三個稜。一連通圖如包含一個以上的雙稜將包含一個子圖。

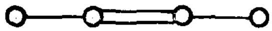


但這違反 (7)，所以至多出現一個雙稜。 不僅如此， 如果 Γ 有一雙稜，則它就不能有一個結（分岐點）（還是依據 (7)），



所以第二圖是僅有的可能性（由 (3) 已知不可能有循環）。最後，令 Γ 只有單稜； 如果 Γ 沒有結， 則它必須是單鏈（又是因爲不能有循環）。如果 Γ 有結時，也不能多於一個，否則違反 (7)，所以第四圖是剩下的可能性。

(9) 在 (8) 中的第二型的連通圖必是 Coxeter 圖 F_4



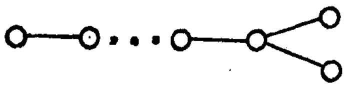
或 Coxeter 圖 $B_n(=C_n)$



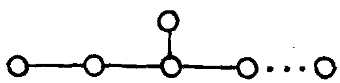
。

置 $\varepsilon=\sum_{i=1}^{p} i\varepsilon_i$, $\eta=\sum_{i=1}^{q} i\eta_i$。由假設，$2(\varepsilon_i,\varepsilon_{i+1})=-1=2(\eta_i,\eta_{i+1})$，而且其他任何的一對根都是正交的。所以 $(\varepsilon,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{p} i^2-\sum_{i=1}^{p-1} i(i+1)$ $=p(p+1)/2$, $(\eta,\eta)=q(q+1)/2$。因爲 $4(\varepsilon_p,\eta_q)^2=2$，所以我們也有 $(\varepsilon,\eta)^2=p^2q^2(\varepsilon_p,\eta_q)^2=p^2q^2/2$。因爲 ε 和 η 顯然是線性獨立，所以由 Sachwartz 不等式得 $(\varepsilon,\eta)^2<(\varepsilon,\varepsilon)(\eta,\eta)$，或 $p^2q^2/2<p(p+1)$ $q(q+1)/4$，因此 $(p-1)(q-1)<2$。滿足此不等式的解是 $p=q$ $=2$ (因而是 F_4) 或 $p=1$ (p 任意)，$q=1$ (p 任意)。

(10) 在 (8) 中的第四型連通圖必是 Coxeter 圖 D_n



或 Coxeter 圖 E_n $n=6,7$, 或 8



置 $\varepsilon=\sum_i\varepsilon_i$, $\eta=\sum_i\eta_i$, $\xi=\sum_i\xi_i$。

顯然 ε，η ζ 是互相正交的線性獨立向量，而且 ψ 不是 ε，ζ 和 η 的一個非零線性組合。正如(4)中的證明，我們因而得 $\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2+$ $\cos^2\theta_3<1$，其中 $\theta_1,\theta_2,\theta_3$ 分別是 ψ 和 ε，η，ζ 的夾角。計算如 (9) 只是以 $p-1$ 代替 p 就得 $(\varepsilon,\varepsilon)=p(p-1)/2$，同理。$(\eta,\eta)=q(q-1)/2$, $(\zeta,\zeta)=r(r-1)/2$。所以 $\cos^2\theta_1=(\varepsilon,\psi)^2/(\varepsilon,\varepsilon)(\psi,\psi)=(p-1)^2$ $(\varepsilon_{p-1},\psi)^2/(\varepsilon,\varepsilon)=\frac{1}{4}(2(p-1)^2/p(p-1))=(p-1)/2p=\frac{1}{2}(1-1/p)$。同理 $\cos^2\theta_2=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)$，$\cos^2\theta_3=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{r}\right)$。加起來，我們得不等式 $1/2(1-1/p+1-1/g+1-1/r)<1$ 或(*) $1/p+1/q+1/r>1$。(順便提一下，此不等式具有悠久的數學歷史。) 只要改變標號，我們可

以假設 $1/p\leq 1/q\leq 1/r\leq 1/2$; 如果 p, q 或 $r=1$，我們就回到 A_n 型)。特別，由不等式 (*) 就得 $3/2\geq 3/r>1$，所以 $r=2$。於是 $1/p+1/q>1/2, 2/q>1/2$ 而且 $2\leq q<4$。如果 $q=3$，則 $1/p>1/6$ 因而 $p<6$。所以 (p,q,r) 的可能情形是: $(p,2,2)=D_n$; $(3,3,2)=E_6$; $(4,3,2)=E_7$; $(5,3,2)=E_8$

以上的討論證明了歐氏空間中容許向量集合的所有連通圖必是 A—G型的 Coxeter 圖之一種。特別，根系的 Coxeter 圖必是這些型中的一種。但是除了 B_l, C_l 以外，其他一切的 Coxer 圖都唯一地決定了 Dynkin 圖，所以定理得證。

表一 **Cartan** 矩陣

$$A_l:\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B_l:\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C_l:\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & & & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & & & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D_l:\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & & & & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_6: \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_7: \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_8: \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F_4: \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad G_2: \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

習　題

1. 試驗證在表一中所有的 Cartan 矩陣。

2. 試證 Cartan 矩陣的行列式值（對 A_l—D_l 型可用數學歸納法）如下:

A_l: $l+1$; B_l: 2; C_l: 2; D_l: 4; E_6: 3; E_7: 2; E_8, F_4 以及 G_2: 1

3. 利用 (11.1) 的算法試寫下 G_2 所有的根。對 C_3: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ 做同樣的事。

4. 試證一根系Φ的 Weyl 羣是和它的既約成分的相關 Weyl

羣的直積同構。

5. 試證除了 B_l, C_l 外，每一個既約根系和它的對偶是同構。至於 B_l 和 C_l 互爲對偶。

6. 設若一個 Dynkin 圖包含在另一個 Dynkin 圖時，如 E_6 在 E_7 中，E_7 在 E_8， 試證前者所對應的根系也必包含在後者所對應的根系中

12. 根系與自同構的建構

在第十一節中（既約）根系的全部可能（連通） Dynkin 圖已決定出來。現在只剩下證明 $A—G$ 型中的每一圖確實是屬於某一根系 Φ。在此之後，我們概略地討論 $Aut\Phi$。$A_l—D_l$ 型的根系其存在性可藉着證明每一古典線性李代數（1,2）的根系是指定型的一種而得證。然而在這樣做法下，我們須先證明這些代數是半單的（參考第九節）。因而給一個直接的造法是比較容易而且這樣做法可使得 Weyl 羣的結構顯得更清楚。

12.1. $A—G$ 型的造法

我們將考慮幾個不同的空間 $\mathbf{R}^n$， 其內積如常，其一標準正交基底爲 $\varepsilon_1, \cdots\cdots, \varepsilon_n$。此基底的一切整係數線性組合形成一個格子，記爲 I。在每一種情形下，我們將取 E 爲 $\mathbf{R}^n$（或具有沿襲的內積的適當子空間）。那麼 Φ 將定義成在 I 中（或其適當子羣）中具有特定長度的向量集合。

因爲 I 是格子（因而在 $\mathbf{R}^n$ 的通常位相中是離散的）， 然而在 $\mathbf{R}^n$ 中只有一種或二種長度的向量集合是緊緻的（閉而有界的）， 於是 Φ 必然是有限的，而且依定義是不包含 0 的。在每一種情形下，將

Φ 會生成 E（事實上，我們能明確地列出 Φ 的一個基底）。因此是滿足 $R1$。所選的根長也使得（$R2$）當然成立。對於（$R3$）只要檢驗鏡射 $\sigma_\alpha(\alpha\in\Phi)$ 會把 Φ 映回 I 中（或它的特定子羣）就可以了，因爲這樣一來，$\sigma_\alpha(\Phi)$ 自動包含所需求長度的向量，而（$R3$）就可由（$R4$）證得。至於（$R4$），只要選擇長度的平方能整除 2 的向量就够了，蓋因一切的內積 $(\alpha,\beta)\in\mathbf{Z}(\alpha,\beta\in I)$。

做了這些說明之後，我們現在分別來處理 $A-G$ 等情形。在利用上面所略述的方法驗證了（$R1$）至（$R4$）之後，讀者將會發現所得的 Cartan 矩陣和表一（11.4）的是一致。

$A_l(l\geq 1)$：令 E 是 $\mathscr{R}^{n+1}$ 中和向量 $\varepsilon_1+\varepsilon_2\cdots\cdots+\varepsilon_{l+1}$ 正交的子空間。令 $I'=I\cap E$，而且取 $\Phi=\{\alpha\in I'\mid(\alpha,\alpha)=2\}$。顯然 $\Phi=\{\varepsilon-\varepsilon_j\mid i\neq j\}$。向量 $\alpha_i=\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}(1\leq i\leq l)$ 是線性獨立，而且 $\varepsilon_i-\varepsilon_j=(\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1})+\cdots\cdots+(\varepsilon_{j-1}-\varepsilon_j)$, $i<j$，這證明了 $\alpha_i(1\leq i\leq l)$ 是 Φ 的一個基底。如此顯然可得 A_l 的 Cartan 矩陣。最後，$\sigma_{\alpha_i}(\varepsilon_i)=\varepsilon_{i+1}$, $\sigma_{\alpha_i}(\varepsilon_{i+1})=\varepsilon_i$ 以及 $\sigma_{\alpha_i}(\varepsilon_j)=\varepsilon_j$, $j\neq i, i+1$。所以 σ_{α_i} 對應於對稱羣 S_{l+1} 中的對換 $(i,i+1)$；這些對換生成 S_{l+1}，所以我們得一個由 $\mathscr{W}$ 映上 S_{l+1} 的自然同構

$B_l(l\geq 2)$：令 $E=\mathbf{R}^l$, $\Phi=\{\alpha\in I\mid(\alpha,a)=1$ 或 $2\}$。Φ 顯然是由向量 $\pm\varepsilon_i$（長度的平方是 1）和向量 $\pm(\varepsilon_i\pm\varepsilon_j)$, $i\neq j$（長度的平方是 2）組成的。$\varepsilon_1-\varepsilon_2,\varepsilon_2-\varepsilon_3,\cdots\cdots,\varepsilon_{l-1}-\varepsilon_l,\varepsilon_l$ 等 l 個向量是線性獨立的；短根，$\varepsilon_i=(\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1})+(\varepsilon_{i+1}-\varepsilon_{i+2})+\cdots\cdots+(\varepsilon_{l-1}-\varepsilon_l)+\varepsilon_l$ 而長根 $\varepsilon_i-\varepsilon_j$ 或 $\varepsilon_i+\varepsilon_j$；也有類似的表示。這個有序基底的 Cartan 矩陣顯然是 B_l。$\mathscr{W}$ 的作用有如 $\{\varepsilon_1,\cdots\cdots,\varepsilon_l\}$ 上的一切排列以及變號，所組成的羣，所以 $\mathscr{W}$ 和 $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^l\cdot S_l$，即 $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^l$ 和 S_l 的半直積（後者作用於前者之上），是同構。

$C_l(l\geq 3)$：將 $C_l(l\geq 2)$ 看成 B_l 的根系的對偶是較方便的（當

$l=2$ 時，$B_2=C_2$），參考習題 11.5。讀者可以直接驗證在 $E=\mathbf{R}^l$ 中；$\pm 2\varepsilon_i$, $\pm(\varepsilon_i\pm\varepsilon_j)$, $i\neq j$ 之全體形成 C_l 型的根系，其基底是 $(\varepsilon_1-\varepsilon_2, \cdots\cdots, \varepsilon_{l-1}-\varepsilon_l, 2\varepsilon_l)$。當然其 Weyl 羣和 B_l 的是同構。

$D_l(l\geq 4)$: 令 $E=\mathbf{R}^l$, $\Phi=\{\alpha\in I\,|\,(\alpha,\alpha)=2\}=\{\pm(\varepsilon_i\pm\varepsilon_j)\,|\,i\neq j\}$。取基底為 l 個線性獨立向量 $\varepsilon_1-\varepsilon_2, \cdots\cdots, \varepsilon_{l-1}-\varepsilon_l, \varepsilon_{l-1}+\varepsilon_l$（因而得到 D_l） Weyl 羣是$\{\varepsilon_1, \cdots\cdots, \varepsilon_l\}$上的全體排列和僅改變偶數個符號的變號。所以$\mathscr{W}$和 $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{l-1}\cdot S_l$ 是同構。

E_6, E_7, E_8: 我們知道 E_6, E_7 能够自然地和 E_8 的子根系認同（習題 11.6），所以只要造 E_8 就足够了。不過這個造法是稍複雜些。取 $E=\mathbf{R}^8, I'=I+\mathbf{Z}((\varepsilon_1+\cdots\cdots+\varepsilon_8)/2), I''=\{\sum c_i\varepsilon_i+c/2\,(\varepsilon_1+\cdots\cdots+\varepsilon_8)\,|\,c+\sum c_i$是偶數$\}$。（試驗證 I'' 是 I' 的子羣！）定義 $\Phi=\{\alpha\in I''(\alpha,\alpha)=2\}$。顯然，$\Phi$是由$\pm(\varepsilon_i\pm\varepsilon_j)$, $i\neq j$ 以及$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}(-1)^{k(i)}\varepsilon_i$（在此 $k(i)=0$，1 而且其和是偶數）所組成的。由檢驗的結果知一切的內積都是整數（這是必須檢驗的，蓋因我們處理的對象是比 I 大的格子）。至於基底我們取其為$\{\frac{1}{2}(e_1+e_8-(e_2+\cdots\cdots+e_7)), \varepsilon_1+\varepsilon_2, \varepsilon_2-\varepsilon_1, \varepsilon_3-\varepsilon_2, \varepsilon_4-\varepsilon_3, \varepsilon_5-\varepsilon_4, \varepsilon_6-\varepsilon_5, \varepsilon_7-\varepsilon_6\}$。（安排這樣的次序使得能對應表一 (11.4) 中 E_8 的 Cartan 矩陣。）讀者最好自己決定 Weyl 羣其元數是 $2^{14}3^5 5^2 7$。

F_4: $E=\mathbf{R}^4$, $I'=I+\mathbf{Z}((\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4)/2)$, $\Phi=\{\alpha\in I'\,|\,(\alpha,\alpha)=1$ 或$2\}$。於是 Φ是由 $\pm\varepsilon_i$, $\pm(\varepsilon_i-\varepsilon_j)$, $i\neq j$ 以及$\pm\frac{1}{2}(\varepsilon_1\pm\varepsilon_2\pm\varepsilon_3\pm\varepsilon_4)$ 之全體所組成，在此正負號可以任意取捨。只要驗證一下便知一切的內積都是整數。至於基底可取為 $\{\varepsilon_2-\varepsilon_3, \varepsilon_3-\varepsilon_4, \varepsilon_4, \frac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4)\}$。在此$\mathscr{W}$的元數是 1152。

G_2: 在第九節中我們已明確地造了 G_2。在抽象的方式下，我們能够取 $E=\{r\in\mathbf{R}^3\,|\,(r,\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)=0\}, I'=I\cap E, \Phi=\{\alpha\in I'\,|\,(\alpha,$

$\alpha)=2$ 或 $6\}$。所以$\Phi=\pm\ \{\varepsilon_1-\varepsilon_2, \varepsilon_2-\varepsilon_3, \varepsilon_1-\varepsilon_3, 2\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3, 2_2\varepsilon-\varepsilon_1-\varepsilon_3, 2\varepsilon_3-\varepsilon_1-\varepsilon_2\}$。至於基底可取爲 $\varepsilon_1-\varepsilon_2, -2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$ （$\mathscr{W}$的作用如何呢? ）

定理 對於A-G型的每一個 Dynkin 圖（或 Cartan 矩陣），都存在一個既約根系以它做爲 Dynkin 圖。

12.2. Φ的自同構

我們將對每一個根系Φ的 $Aut\Phi$ 做一個完整的描述。記得由引理 9.2 可以證明一件事，那就是$\mathscr{W}$是 $Aut\Phi$ 的正規子羣（習題 9.6）。令$\Gamma=\{\sigma\in Aut\Phi\,|\,\sigma(\Delta)=\Delta\}$，$\Delta$是Φ的一個固定基底。$\Gamma$顯然是 $Aut\Phi$ 的一個子羣，如果$\tau\in\Gamma\cap\mathscr{W}$，那麼由$\mathscr{W}$的單傳遞性（定理 10.3(e)），知$\tau=1$。不僅如此，如果$\tau\in Aut\Phi$，那麼$\tau(\Delta)$顯然是Φ的另一個基底，所以存在$\sigma\in\mathscr{W}$使得$\sigma\tau(\Delta)=\Delta$（定理 10.3(b)），因此$\tau\in\Gamma\mathscr{W}$。所以 $Aut\Phi$ 是Γ和$\mathscr{W}$的半直積。

對於一切的$\tau\in Aut\Phi$以及一切的α，$\beta\in\Phi$，我們有$\langle\alpha,\beta\rangle=\langle\tau(\alpha),\tau(\beta)\rangle$。所以$\tau\in\Gamma$決定 Dynkin 圖的一個自同構（在顯然意味之下）。如果 τ 在 Dynkin 圖下的作用是自明的，那麼$\tau=1$（因爲Δ生成E）。他方面，Dynkin 圖的每一個自同構決定了Φ的一個自同構（參考命題 11.1)。所以Γ可以認同是 Dynkin 圖的自同構羣。只要看一看（11.4）的表就得到Γ的一個描述。以下的表一總結這樣的描述以及既約根系Φ的一些有用資料。（因爲除么射之外的 Dynkin 圖自同構僅當Φ只有一個根長時才存在，所以當 Dynkin 圖和 Coxeter 圖一致時，我們也用圖自同構這個名詞。）

表 一

型	正根個數	$\mathscr{W}$的元數	$\mathscr{W}$的結構	Γ
A_l	$\binom{l+1}{2}$	$(l+1)!$	S_{l+1}	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}(l\geq 2)$
B_l, C_l	l^2	$2^l l!$	$(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^l \rtimes S_l$	1
D_l	l^2-l	$2^{-1}l!$	$(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{l-1} \rtimes S_l$	$\begin{cases} S_3(l=4) \\ \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}(l>4) \end{cases}$
E_6	36	$2^7\cdot 3^4\cdot 5$		$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
E_7	63	$2^{10}3^4\cdot 5\cdot 7$		1
E_8	120	$2^{14}\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7$		1
F^l	24	$2^7\cdot 3^2$		1
G_2	6	$2^2 3$	D_6	1

習　題

1. 試詳證 (12.1) 中的建構。

2. 試驗證表二。

3. 令$\Phi\subset E$滿足 $(R1),(R3),(R4)$ 但不滿足 $(R2)$，參考習題 9.9。更進一步假定Φ是既約的（依第十一節的定義）。試證Φ是 E $(n=dimE)$ 中 B_n 型 C_n 和型的根系的聯集，在此，B_n 的長根也是 C_n 的短根。（在文獻中這叫做 BC_n 型的非減縮根系。）

表二、最高長根和短根

型	長　根	短　根
A_l	$\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots+\alpha_l$	
B_l	$\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+\cdots\cdots+2\alpha$	$\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots+\alpha_l$
C_l	$2\alpha_1+2\alpha_2+\cdots\cdots+2\alpha_{l-1}+\alpha_l$	$\alpha_1+2\alpha_2+\cdots\cdots+2\alpha_{l-1}+\alpha_l$

	$\alpha_1+2\alpha_2+\cdots\cdots+2\alpha_{l-2}+\alpha_{l-1}+\alpha_l$	
E_6	$\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+3\alpha_4+2\alpha_5+\alpha_5$	
E_7	$2\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4+3\alpha_5+2\alpha_6+2_7$	
E_8	$2\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3+6\alpha_4+5\alpha_5+4\alpha_6+3\alpha_7+2\alpha_8$	
F_4	$2\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3+2\alpha_4$	$\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+2\alpha_4$
G_2	$3\alpha_1+2\alpha_2$	$2\alpha_1+\alpha_2$

4. 試證 G_2 中的長根形成 E 中的一個 A_2 型根系。

5. 在造 C_l 的過程中，Φ 是否可以看成 I 中長度平方為 2 或4. 的向量集合？試說明之。

6. 試證映射 $\alpha \longrightarrow -\alpha$ 是 Φ 的一個自同構。試決定在什麼樣的既約根系 Φ 中此映射會屬於 Weyl 羣。

7. 如果 Φ 不是既約，試描述 $Aut\Phi$。

附　註

這一節的材料的處理方式是以 Serre〔2〕做藍本。有關各個根系的更詳盡資料可參考 Bourbaki〔2〕。

13. 權的抽象理論

在這一節中我們要描述在半單李代數的表現理論當中只和根系有關的部分。（在第四章中才會用到這些討論。）令 Φ 是歐氏空間 E 中的根系，$\mathscr{W}$ 是它的 Weyl 羣。

13.1. 權

令 $\Lambda=\{\lambda\in E \mid <\lambda,\alpha>\in Z \ \ \forall\alpha\in\Phi\}$ 並且稱 Λ 的元素為權。因為

$<\lambda,\alpha> = \dfrac{2(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$對於 λ 是線性，所以Λ是E的一個子羣而且Λ包含Φ。以 Λ_r 表示根格子（$=\Lambda$中由Φ生成的子羣）。在專門的說法之下，Λ_r 是E中的一個格子：它是E中一個 $\mathbf{R}$-基底（即，任何單根集合）的整係數線性組合之全體。固定一個基底$\Delta\subset\Phi$。對於 $\lambda\in\Lambda$ 來說如果所有的整數 $<\lambda,\alpha>(\alpha\in\Delta)$ 是非負的，我們就說它是制囿權，如果這些整數是正的，我們就說它是強制囿權。令 Λ^+ 是制囿權之全體集合。在（10.1）的語言下，$\Lambda^+=\{\lambda\in\Lambda\,|\,\lambda\in\mathscr{C}(\Delta)\}$，然而$\Lambda\cap\mathscr{C}(\Delta)$是強制囿權的全體。

如果$\Delta=\{\alpha_1,\cdots\cdots,\alpha_l\}$，那麼$2\alpha_i/(\alpha_i,\alpha_i)$，$1\le i\le l$，還是形成$E$的一個基底。令 $\lambda_1,\cdots\cdots,\lambda_l$ 是對偶基底（關於 E 上的內積）：$2(\lambda_i,\alpha_j)/(\alpha_j,\alpha_j)=\delta_{ij}$。因爲一切的$<\lambda_i,\alpha>(\alpha\in\Delta)$ 是非負整數，所以 λ_i 是制囿權。我們稱他們爲基本制囿權（關於Δ）。注意，$\sigma_i\lambda_j=\lambda_j-\delta_{ij}\alpha_i$。如果 $\lambda\in E$是任意的，例如 λ 是任何權，令 $m_i=<\lambda,\alpha_i>$。於是 $0=<\lambda-\sum m_i\lambda_i,\alpha>\ \forall\alpha\in\Delta$，所以 $(\lambda-\sum m_i\lambda_i,\alpha)=0$ 或 $\lambda=\sum m_i\lambda_i$。因此$\Lambda$是以（$\lambda_i, 1\le i\le l$）爲基底的一個格子，而且 $\lambda\in\Lambda^+$ 的充分必要條件是所有的 $m_i\le 0$（參考圖一，A_2 型）

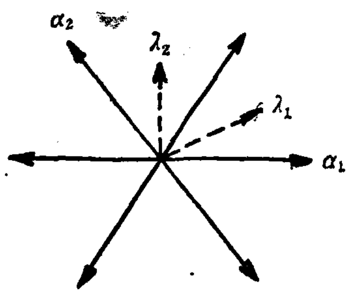


圖　一

關於格子的一個基本事實是 Λ/Λ_r 必是一有限羣（叫做Φ的基礎

羣）。我們能够直接地看出這一點如下：記 $\alpha_i=\sum_j m_{ij}\lambda_j$ （$m_{ij}\in\mathbf{Z}$）。於是 $<\alpha_i,\alpha_k>=\sum_j m_{ij}<\lambda_j,\alpha_k>=m_{ik}$。換句話說，Cartan 矩陣表示基底的變換。爲了要以 α_i 表示 λ_j，我們只要求出 Cartan 矩陣的逆矩陣就行了；它的行列式值（參考習題 11.2）正好是分母，所以這就測度了Λ_r 在 Λ的指標。譬如，在 A_1 型中，$\alpha_1=2\lambda_1$ （這是單根恰好是制囿權的僅有情形，其理由在以後將顯得很清楚。）在 A_2 型中，Cartan 矩陣是 $\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$，所以 $\alpha_1=2\lambda_1-\lambda_2$ 和 $\alpha_2=-\lambda_1+2\lambda_2$。將 Cartan 矩陣的逆矩陣求出，即 $(1/3)\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$，所以 $\lambda_1=(1/3)(2\alpha_1+\alpha_2)$ 和 $\lambda_2=(1/3)(\alpha_1+2\alpha_2)$。只要計算 Cartan 矩陣的行列式值我們能驗證既約情形下基礎羣Λ/Λ_r的元數如下：

$$A_l,\ l+1;B_l,C_l,E_7,2;D_l,4;E_6,3;E_8,F_4,G_2,\ 1\ 。$$

多花一點工夫之後，我們能够計算出用 α_j 表示 λ_i 的明確方法。雖然嚴格的說起來以後將用不到這資料，但爲讀者的方便，我們還是把它列在表一中。基礎羣的確實結構可由初等因子的計算或由表一導出（習題 4）。

13.2. 制囿權

Φ的 Weyl 羣$\mathscr{W}$保持 E 上的內積，因此保持 Λ 不變。（事實上，我們已做了更正確的觀察 $\sigma_i\lambda_j=\lambda_j-\delta_{ij}\alpha_i$ 。）在研究表現理論中常出現權的$\mathscr{W}$軌道。由 10.3B 我們能有以下的事實。

引理 A 在$\mathscr{W}$的作用下，每一權都和一個且是唯一的制囿權共軛。如果 λ 是制囿的，那麼對一切的 $\sigma\in\mathscr{W}$ 我們有 $\sigma\lambda<\lambda$，而且如果 λ 是強制囿時，則 $\sigma\lambda=\lambda$ 導致 $\sigma=1$ 。

身爲E的子集合，Λ也是有偏序：$\lambda\succ\mu$ 的充要條件是 $\lambda-\mu$ 爲正根的和（10.1）。不幸，此順序和制囿性之間沒有更密切的關係；

譬如，我們容易找到 $\lambda \succ \mu$，其中 μ 是制圎而 λ 不是制圎(習題 2)。下一個引理將證明，無論如何，對於 $\prec$ 來說制圎權也表現得不太壞。

表　一

$$A_l: \lambda_i = \frac{1}{l+1}[(l-i+1)\alpha_1 + 2(l-i+1)\alpha_2 + \cdots\cdots + (i-1)(l-i+1)\alpha_{i-1} + i(l-i+1)\alpha_i + i(l-i)\alpha_{i+1} + \cdots\cdots + i\alpha_l]$$

$$B_l: \lambda_i = d_1 + 2\alpha_2 + \cdots\cdots + (i-1)\alpha_{i-1} + i(\alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots\cdots \alpha_l) \quad (i<l)$$

$$\lambda_l = \frac{1}{2}(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots\cdots + l\alpha_l)$$

$$C_l: \lambda_i = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots\cdots + (i-1)\alpha_{i-1} + i(\alpha_i + \cdots\cdots + \alpha_{l-1} + \frac{1}{2}\alpha_l)$$

$$D_l: \lambda_i = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots\cdots + (i-1)\alpha_{i-1} + i(\alpha_1 + \cdots\cdots + \alpha_{l-2}) + \frac{1}{2} i(\alpha_{l-1} + \alpha_l) \quad (i<l-1)$$

$$\lambda_{l-1} = \frac{1}{2}\left(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots\cdots + (l-2)\alpha_{l-2} + \frac{1}{2}\alpha_{l-1} + \frac{1}{2}(l-2)\alpha_l\right)$$

$$\lambda_l = \frac{1}{2}\left(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots\cdots + (l-2)\alpha_{l-2} + \frac{1}{2}(l-2)\alpha_{l-1} + \frac{1}{2} l\alpha_l\right)$$

在以下的表中，$\sum q_i\alpha_i$ 縮寫成 $(q_1, \cdots\cdots, q_l)$

E_6: $\lambda_1 = \frac{1}{3}(4, 3, 5, 6, 4, 2)$

$\lambda_2 = (1, 2, 2, 3, 2, 1)$

$\lambda_3 = \frac{1}{3}(5, 6, 10, 12, 8, 4)$

$\lambda_4 = (2, 3, 4, 6, 4, 2)$

$\lambda_5 = \frac{1}{3}(4, 6, 8, 12, 10, 5)$

$\lambda_6 = \frac{1}{3}(2, 3, 4, 6, 5, 4)$

E_7: $\lambda_1 = (2, 2, 3, 4, 3, 2, 1)$

$\lambda_2=\frac{1}{2}(4, 7, 8, 12, 9, 6, 3)$

$\lambda_3=(3, 4, 6, 8, 6, 4, 2)$

$\lambda_4=(4, 6, 8, 12, 9, 6, 3)$

$\lambda_5=\frac{1}{2}(6, 9, 12, 18, 15, 10, 5)$

$\lambda_6=(2, 3, 4, 6, 5, 4, 2)$

$\lambda_7=\frac{1}{2}(2, 3, 4, 6, 5, 4, 3)$

E_8: $\lambda_1=(4, 5, 7, 10, 8, 6, 4, 2)$

$\lambda_2=(5, 8, 10, 15, 12, 9, 6, 3)$

$\lambda_3=(7, 10, 14, 20, 16, 12, 8, 4)$

$\lambda_4=(10, 15, 20, 30, 24, 18, 12, 6)$

$\lambda_5=(8, 12, 16, 24, 20, 15, 10, 5)$

$\lambda_6=(6, 9, 12, 18, 15, 12, 8, 4)$

$\lambda_7=(4, 6, 8, 12, 10, 8, 6, 3)$

$\lambda_8=(2, 3, 4, 6, 5, 4, 3, 2)$

F_4: $\lambda_1=(2, 3, 4, 2)$

$\lambda_2=(3, 6, 8, 4)$

$\lambda_3=(2, 4, 6, 3)$

$\lambda_4=(1, 2, 3, 2)$

G_2: $\lambda_1=(2, 1)$

$\lambda_2=(3, 2)$

引理 B. 令 $\lambda\in\Lambda^+$。則 $\{\mu \mid \mu$ 是制囿權而且 $\mu<\lambda\}$ 爲一有限集合。

證明 令 $\lambda=\sum r_i\alpha_i$, $\mu=\sum s_i\alpha_i$。由習題 7，$r_i, s_i\in\mathbf{Q}^+$。如果 $\lambda>\mu$，於是一切的 $r_i-s_i\in\mathbf{Z}^+$，這使得 s_i 的可能性只有有限多個。

13.3. 權 δ

記得（引理 10.2B 的系）$\delta=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\succ 0}\alpha$，而且 $\sigma_i\delta=\delta-\alpha_i$（$1\le i\le l$）。當然，$\delta$ 不一定會落在 Λ_r（參考 A_l 型）中；但是 δ 是落在 Λ 中。更正確的說法是：

引理A. $\delta=\sum_{j=1}^{l}\lambda_j$，所以 δ 是一個（強）制囿權。

證明　因爲 $\sigma_i\delta=\delta-\alpha_i$，$(\delta-\alpha_i,\alpha_i)=(\sigma_i^2\delta,\sigma_i\alpha_i)=(\delta,-\alpha_i)$，或 $2(\delta,\alpha_i)=(\alpha_i,\alpha_i)$ 或 $<\delta,\alpha_i>=1$ $(1\le i\le l)$。但 $\delta=\sum_i<\delta,\alpha_i>\lambda_i$（參考(13.1)），所以引理得證。

下一個引理只是一個附屬的結果。

引理B. 令 $\mu\in\Lambda^+$，$\nu=\sigma^{-1}\mu$ $(\sigma\in\mathscr{W})$。於是 $(\nu+\delta,\nu+\delta)\le(\mu+\delta,\mu+\delta)$。等號成立的充要條件是 $\sigma=1$ 或 $\mu=0$

證明。 $(\nu+\delta,\nu+\delta)=(\sigma(\nu+\delta),\sigma(\nu+\delta))=(\mu+\sigma\delta,\mu+\sigma\delta)=(\mu+\delta,\mu+\delta)-2(\mu,\delta-\sigma\delta)$。因爲 μ 是制囿的而且 $\delta-\sigma\delta$ 是正根的和（引理 13.2A 和 13.3A），右端 $\le(\mu+\delta,\mu+\delta)$，等號成立的充要條件是 $(\mu,\delta-\sigma\delta)=0$。除非 $\mu=0\ (=\nu)$，否則這會使得 $\delta-\sigma\delta=0$，或 $\sigma=1$（引理 13.2A 和引理 13.3A）。

13.4. 飽和權集

在表現理論中，有某些 $\mathscr{W}$ 不變的有限權集扮演了一個相當突出的角色。令 Π 是 Λ 的一個子集合。如果對一切 $\lambda\in\Pi$，$\alpha\in\Phi$ 以及 $0\le i\le<\lambda,\alpha>$，權 $\lambda-i\alpha$ 也是落在 Π 中則稱 Π 爲飽和。首先要注意的一件事是任何飽和集自動是 $\mathscr{W}$-不變，蓋因 $\sigma_\alpha\lambda=\lambda-<\lambda,\alpha>\alpha$ 而 $\mathscr{W}$ 是由鏡射生成之故。令 Π 是一個飽和集合。如果 $\lambda\in\pi$ 而且對一切的 $\mu\in\pi$，$\mu<\lambda$，我們就說 Π 有最高權 λ $(\lambda\in\Lambda^+)$。譬如：(1)

{0} 是飽和而且其最高權是 0 (2) 半單李代數的一切根Φ和 0 一起也是飽和。一旦Φ是既約，則有一唯一的最高根（對於Φ的一個固定基底Δ）（引理 10.4A），所以Π以此根爲其最高權（爲什麼？）

引理 A 一飽和權集如有最高權必是有限的

證明 利用引理 13.2B。

引理 B 令Π是飽和的，而λ是其最高權。如果$\mu\in\Lambda^+$而且$\mu<\lambda$，則$\mu\in\Pi$。

證明 假定 $\mu'=\mu+\sum_{\alpha\in\Delta}k_\alpha\alpha\in\Pi$ ($k_\alpha\in\mathbf{Z}^+$)。（注意：我們並沒假定 μ' 是制囿。）我們將指出如何將 k_α 一個一個減去而其結果還是落在Π中，於是最後得證$\mu\in\Pi$。當然，我們是以λ做出發點。現在假定$\mu'\neq\mu$，所以有某些 k_α 是正的。從 $(\sum_\alpha k_\alpha\alpha, \sum_\alpha k_\alpha\alpha)>0$，我們得知有某一$\beta\in\Delta$使得$(\sum_\alpha k_\alpha\alpha,\beta)>0$，其中 $k_\beta>0$。特別，$<\sum_\alpha k_\alpha\alpha,\beta>$是正的。因爲 μ 是制囿的，所以$<\mu,\beta>$是非負的。所以$<\mu',\beta>$是正的。由飽和集的定義，現在我們能夠從 μ' 中減去一個β其結果還是落在Π中，因而就少了一個 k_β。

系（**證明的推論**）。令Π是飽和的，λ是其最高權。如果$\mu\in\Pi$，$\mu\neq\lambda$，那麼存在某一$\alpha\in\Delta$使得$\mu+\alpha\in\Pi$。

證明 如果μ不是制囿的，那麼必存在 $\alpha\in\Delta$ 使得$<\mu,\alpha>$是一道地的負數，所以μ，$\mu+\alpha$，……，$\mu-<\mu,\alpha>\alpha$ 都落在Π中。如果μ是制囿的，由引理的證明我們得知μ是由λ減去一個單根而得而且μ還是落Π中。

一個具有最高權λ的飽和集 Π 在引理 B 的照耀下顯出一幅清楚的影像：在上述的偏序下 Π 是由一切低於或等於的制囿權及他們的 $\mathscr{W}$ 共軛所組成的。特別，對於給定的 $\lambda\in\Lambda^+$，至多只能有一個這樣的集合Π存在。反之給定$\lambda\in\Lambda^+$，我們只須定義Π是由一切低於

λ 的制囿權及他們的 $\mathscr{W}$-共軛所組成的集合。因爲 Π 在 $\mathscr{W}$ 的作用下保持不變，所以能够看出其飽和性（習題10），又由引理 13.2A 知 Π 以 λ 爲其最高權。

我們證明一個不等式做爲這一節的結束，此不等式對於應用 Freudenthal 公式時是很重要的。

引理 C. 令 Π 是飽和，λ 是其最高權。如果 $\mu\in\pi$，那麼 $(\mu+\delta,\mu+\delta)\leq(\lambda+\delta,\lambda+\delta)$，等號成立的充要條件是 $\mu=\lambda$

證明 由引理 13.3B 知，只要考慮 μ 是制囿的而且 $\mu\neq\lambda$ 就可以了。由上面引理 B 的系知，存在一 $\alpha\in\Delta$ 使得 $\mu+\alpha\in\Pi$。記 $\mu'=\mu+\alpha$。於是 $(\mu'+\delta,\mu'+\delta)-(\mu+\delta,\mu+\delta)=2(\mu+\delta,\alpha)+(\alpha,\alpha)$。因爲 $\mu+\delta$ 是制囿的，所以上式的右端是大於 0。$(\mu+\delta,\mu+\delta)<(\mu'+\delta,\mu'+\delta)$。將 μ' 換成和 μ' 共軛的制囿權 ν，我們又得一個不等式（再一次的利用引理 13.3B）。因爲 Π 是有限的而且不等式是嚴格的不等式，所以我們終終究會得到不等式 $(\mu+\delta,\mu+\delta)<(\lambda+\delta,\lambda+\delta)$。故引理證。

習　題

1. 令 $\Phi=\Phi_1\cup\Phi_2\cup\cdots\cdots\cup\Phi_t$ 是 Φ 的一個分解。而 $\Phi_i(1\leq i\leq t)$ 是既約的，又 $\Delta=\Delta_1\cup\cdots\cdots\cup\Delta_t$。試證 Λ 可以分解成 $\Lambda_1\oplus\cdots\cdots\oplus\Lambda_t$ 的直和；Λ^+ 又是如何呢?

2. 試舉一例（譬如 A_2）說明 $\lambda\notin\Lambda^+$, $\alpha\in\Delta$, $\lambda-\alpha\in\Lambda^+$ 是可能的。

3. 試驗證表一中的一些資料，譬如 F_4。

4. 試利用表一證明 A_l 的基本羣是一個循環羣其元數爲 $l+1$，D_l 的基本羣和 $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$（l 奇數）或 $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$（$l$ 偶數）是同構的。（因爲 $A_3=D_3$，所以很容明記住哪一個是哪一個。）

5. 如果 Λ' 是 Λ 中包含 Λ_r 的任意子羣，試證 Λ' 是$\mathscr{W}$不變。因此我們得到一個同態 $\phi: Aut\Phi/\mathscr{W} \longrightarrow Aut(\Lambda/\Lambda_r)$ 。試證 ϕ 是單射，於是導出 $-1 \in \mathscr{W}$ 的充要條件是 $\Lambda_r \supset 2\Lambda$（參考習題12.6）。試證對於既約根系 A_1, B_l, C_l, D_l（l 爲偶數） E_7, E_8, F_4, G_2, 來說 $-1 \in \mathscr{W}$,

6. 當Φ是既約時，試證Φ中的根爲制囿權者正好是最高長根及最高短根（如出現兩種根長的話）（參考（10.4）和習題 10.11）。

7. 如果 $\varepsilon_1, \cdots\cdots, \varepsilon_l$ 是歐氏空間E的鈍角基底（即一切的$(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \leq 0$, $i \neq j$）。試證其對偶基底是銳角的（即一切的 $(\varepsilon_i^*, \varepsilon_j^*) \geq 0$, $i \neq j$）。〔簡化成 $l=2$ 的情形。〕

8. 令Φ是既約的。在不利用表一的資料下，試證每一 λ_i 的形狀都是$\sum_j q_{ij}\alpha_j$，其中一切的 q_{ij} 是正有理數。〔由習題7導出所有的 q_{ij} 都是非負的。從 $(\lambda_i, \lambda_i) > 0$ 得 $q_{ii} > 0$ 。然後證明如果$q_{ij} > 0$ 而且$(\alpha_j, \alpha_k) < 0$，則 $q_{ik} > 0$ 。〕

9. 令 $\lambda \in \Lambda^+$。試證如果 $\sigma(\lambda+\delta)-\delta$ 是制囿時則 $\sigma = 1$ 。

10. 令 $\lambda \in \Lambda^+$，又令$\Pi = \{\mu \in \Lambda^+ | \mu < \lambda\}$。試證$\Pi$及其$\mathscr{W}$-共軛都是飽和，如（13.4）所主張的。

11. 試證Λ的每一子集合都包含在一個唯一最小飽和集。如果該子集合是有限時則相應飽和集也是有限的。

12. 對於 A_2 型的根系，試寫下 Weyl 羣的每一元素在 λ_1, λ_2 上的作用。利用這個資料，試決定屬於飽和集的權何者的最高權是 $\lambda_1+3\lambda_2$。對於 G_2 型及最高權 $\lambda_1+2\lambda_2$ 做同樣的處理。

13. 設 $\lambda \in \Lambda^+$，如果 $\mu \in \Lambda^+$, $\mu \prec \lambda$ 則 $\mu = \lambda$ 時稱 λ 爲極小。試證 Λ_r 在Λ中的每一個陪集正好包含一個極小 λ 。試證 λ 是極小的充要條件是 λ 的 $\mathscr{W}$-軌道是飽和（以 λ 爲最高權），其另一個充要條件是 $\lambda \in \Lambda^+$而且對於一切的根 α，$\langle\lambda, \alpha\rangle = 0, 1, -1$ 。試利用表一

決定每一既約根系Φ的非零極小 λ 如下:

A_l: $\lambda_1, \cdots\cdots, \lambda_l$

B_l: λ_l

C_l: λ_1

D_l: $\lambda_1, \lambda_{l-1}, \lambda_l$

E_6: λ_1, λ_6

E_7: λ_7

附　　註

這一節中的一部分材料是取自 Bourbaki 〔2〕，第四章，第一節，No. 9-10（以及習題23）。但是爲了強調根系所扮演的角色我們所討論的比一般在表現理論所做的要多得多。

第四章　同構與共軛定理

14.　同構定理

現在我們回到第二章所討論的狀況：設 $\mathbf{F}$ 是代數封閉體，$char\ \mathbf{F}=0$。又設L是佈於上$\mathbf{F}$的一個半單李代數，H是L的極大環面子代數，$\Phi\subset H^*$ 是L關於 H的根集。在 (8.5) 中已證明若 $E_{\mathbf{Q}}$ 是Φ在 H^* 中所生成的有理空間，則 $dim_{\mathbf{Q}}E_{\mathbf{Q}}=l$，這裏 $l=dim_{\mathbf{F}}H^*$。將基體由 $\mathbf{Q}$ 擴張至 $\mathbf{R}$ 我們因而得到一個由Φ生成的 l-維實向量空間 E。不僅如此，對偶於 Killing 形式的雙線性對稱形式在E上的功用使得E變成一個歐氏空間。接着定理 8.5 肯定Φ是E的一個根系。

在這一節裏，我們的主要目標是證明具有相同根系的兩個李代數必為同構。事實上，我們能證明更確切的命題，它使我們能同時造出某些自同構。

14.1.　簡化成單純的情形

命題　令L為一單純李代數，H跟Φ如上。則Φ在 (10.4) 的意味下是一既約根系。

證明　假定不然。於是Φ分解成$\Phi_1\cup\Phi_2$，其中 Φ_i 等是正交的。如果$\alpha\in\Phi_1$，$\beta\in\Phi_2$ 則 $(\alpha+\beta,\alpha)\neq 0$，$(\alpha+\beta,\beta)\neq 0$ 所以 $\alpha+\beta\notin\Phi$而且 $[L_\alpha,L_\beta]=0$。若令 K 是由一切的 L_α $(\alpha\in\Phi_1)$ 所生成的子代數，則 $[K,L_\beta]=0$ $(\beta\in\Phi_2)$特別，因為$Z(L)=0$，所以K是L

的眞子代數。又 $[K, L_\alpha] \subseteq K(\alpha \in \Phi_1)$，因此 $[K, L_\alpha] = K(\alpha \in \Phi)$，因此 $[K, L] \subseteq K$（命題 8.4(f)）。所以K是L的眞理想，又$K \neq 0$所以與L的半單性不合。

其次，令L爲任意的半單李代數。於是L可以唯一地寫成單理想的直和 $L_1 \oplus \cdots\cdots \oplus L_t$（定理 5.2）。如果$H$是$L$的一個極大環面子代數，則 $H = H_1 \oplus \cdots\cdots \oplus H_t$，其中 $H_i = L_i \cap H$（參考習題 5.8)。顯然，每一 H_i 是 L_i 中的一個環面子代數，事實上是極大環面子代數：在 L_i 中比 H_i 大的任意環面子代數自然是L的環面子代數而且它與H_j，$j \neq i$ 是互爲交換的，所以和一切的H_j，$j \neq i$ 在L中衍生一個比H大的環面子代數，這是不合的。令 Φ_i 表示 L_i 相對於 H_i 的根系而 E_i 爲相應的實向量空間。如果 $\alpha \in \Phi_i$，我們也能够將α看成H上的一個線性函數其做法是在 $j \neq i$ 時令 $\alpha(H_j) = 0$ 就行了。於是α顯然是L關於H的一個根而且 $L_\alpha \subset L_i$。反之，如果 $\alpha \in \Phi$，則對於某一i我們有 $[H_i, L_\alpha] \neq 0$（否則H會和 L_α 互相交換），而且 $L_\alpha \subset L_i$，所以 $\alpha|_{H_i}$ 是L_i 關於 H_i 的一個根。這個討論證明了Φ可以分解成 $\Phi_1 U \cdots\cdots U \Phi_t$，$E \simeq E_1 \oplus \cdots\cdots \oplus E_t$（參考 (11.3)）。由以上的命題我們得：

系　設L是一半單李代數，H爲L的一個極大環面子代數而且Φ爲根系。如果 $L = L_1 \oplus \cdots\cdots \oplus L_t$ 是L的一個單理想分解，那麼 $H_i = H \cap L_i$ 是 L_i 的一個極大環面子代數而且相應的既約根系 Φ_i 可以很自然地看成Φ的子根系其方式是把Φ寫成 $\Phi = \Phi_1 \cup \cdots\cdots \cup \Phi_t$ Φ的既約分解。

這個系理使我們能藉李代數的根系，刻劃半單李代數的難題簡化成藉既約根系刻劃單純李代數的問題。

14.2. 同構定理

首先我們排出L的一個小衍生集。

命題　令L是半單李代數，H是L的一個極大環面子代數，Φ是L關於H的一個根系。固定Φ的一個基底Δ(10.1)。則L是由根空間$L_\alpha, L_{-\alpha}$ ($\alpha\in\Delta$) 衍生的（看成是李代數），或另一個等值的說法是，L是由任意非零根向量 $x_\alpha\in L_\alpha$, $y_\alpha\in L_{-\alpha}$ ($\alpha\in\Delta$) 所衍生的。

證明　令β是（關於Δ的）一正根。由引理 10.2A 的系，β可以寫成$\beta=\alpha_1+\cdots\cdots+\alpha_s$，其中 $\alpha_i\in\Delta$ 而且每一偏和$\alpha_1+\cdots\cdots\alpha_t$也是一個根。我們也知道(命題 8.4(d)如果$\gamma$，$\delta$ $\gamma+\delta\in\Phi$則$[L_\gamma L_\delta]=L_{\gamma+\delta}$，對於$s$做歸納，我們易看出 L_β 落在由一切的L_α ($\alpha\in\Delta$) 所衍生的子代數中。同理，如果β是負根，那麼 L_β 落在由一切的 $L_{-\alpha}$ ($\alpha\in\Delta$)所衍生的子代數中。但是$L=H+\coprod_{\alpha\in\Phi}L_\alpha$ 而且$H=\sum_{\alpha\in\Phi}[L_\alpha L_{-\alpha}]$所以命題得證。

如果$0\neq x_\alpha\in L_\alpha$, $0\neq y_\alpha\in L_{-\alpha}(\alpha\in\Delta)$，又 $[x_\alpha y_\alpha]=h_\alpha$。我們將稱 $\{x_\alpha, y_\alpha\}$ 或 $\{x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha\}$ 是L 的一個標準衍生集。記住，在α的對應下，h_α 是在 $[L_\alpha, L_{-\alpha}]$ 中對應到 2 的唯一元素。

如果 (L, H) 跟 (L', H') 是兩個對，每一個都是由一個單純李代數和一個極大環面子代數組成，我們要證明相應根系 Φ 跟 Φ' 之間的一個同構會引出一個由 L 映上 L' 的同構而且此同構將 H 送至 H' 上。由定義，一個自同構: $\Phi\longrightarrow\Phi'$ 是由一同構: $E\longrightarrow E'$ 引出的，而後者並不須要是一個等距映射。然而，如果我們將E或 E'上的內積乘以一正實數並不會改變根系的公理。所以如假定同構，$\Phi\longrightarrow\Phi'$ 是來自歐氏空間的一個等距映射是沒有什麼壞處的。其次要注意的是同構: $\Phi\longrightarrow\Phi'$ 唯一地擴張成向量空間的同構ϕ: $H^*\longrightarrow H'^*$ (因爲Φ生成 H^* 而 Φ' 生成 H'^*)。接着經由 H, H' 分別跟他們的對偶的認同（藉 Killing 形式)，ϕ引出一個同構 $\pi: H\longrightarrow H'$。說得更明確一點，如果 $\alpha\longrightarrow\alpha'$ 表示給定的映射$\Phi\longrightarrow\Phi'$，則

$\pi(t_\alpha)=t'_{\alpha'}$，這裏的 t_α 和 t' 分別對應於 α 和 α'（經由 Killing 形式）。因爲給定的同構 $\Phi\longrightarrow\Phi'$ 來自相關的歐氏空間的等距映射，我們也有 $\pi(h_\alpha)=h'_{\alpha'}$ 蓋因 $h_\alpha=2t_\alpha/(\alpha,\alpha)$。

因爲 H,H' 爲交換李代數，π 甚至能夠看成是李代數的一個同構。我們所要做的是找尋一個方法將 π 擴張成一個同構：$L\longrightarrow L'$（我們還是把它記爲 π）。如果這樣的擴張存在時，則對一切的 $\alpha\in\Phi$ 來說，它必把 L_α 送至 $L'_{\alpha'}$。現在剩下的問題是：對於給定的 $x_\alpha\in L_\alpha$，我們能控制它的像元素 $x'_{\alpha'}\in L'_{\alpha'}$ 到何種程度呢？顯然 $x'_{\alpha'}(\alpha'\in\Phi')$ 的選擇是不能完全任意的。譬如，如果我們選擇 $x_\alpha, x_\beta, x_{\alpha+\beta}$ 滿足 $[x_\alpha, x_\beta]=x_{\alpha+\beta}$ 那麼我們只能選取 $x'_{\alpha'+\beta'}=[x'_{\alpha'}, x_{\beta'}]$。居於這個理由我們應將注意力集中在單根上，在這裏的選擇是可以獨立地做。

定理 令 L,L' 爲佈於 $\mathbf{F}$ 上的單李代數，H,H' 分別爲 L,L' 的極大環面子代數，而 Φ,Φ' 分別是相應的根系。假定有一同構 $\Phi\longrightarrow\Phi'$（記爲 $\alpha\longrightarrow\alpha'$）引出 $\pi: H\longrightarrow H'$。固定一個基底 $\Delta\subset\Phi$ 使得 $\Delta'=\{\alpha'|\alpha\in\Delta\}$ 是 Φ' 的一個基底。對於每一 $\alpha\in\Delta,\alpha'\in\Delta'$，選取任意（非零的）$x_\alpha\in L_\alpha, x'_{\alpha'}\in L'_{\alpha'}$（卽選取任意李代數同構 π_α: $L_\alpha\longrightarrow L'_{\alpha'}$）。則存在一唯一的同構 π: $L\to L'$ 擴張了 $\pi: H\to H'$ 以及擴張了一切 $\pi_\alpha(\alpha\in\Delta)$

證明 π 的唯一性（如果存在）是可以立卽得到的：$x_\alpha(\alpha\in\Delta)$ 決定唯一的 $y_\alpha\in L_{-\alpha}$ 使得 $[x_\alpha, y_\alpha]=h_\alpha$，而且依以上的命題知 L 是由 $x_\alpha, y_\alpha(\alpha\in\Delta)$ 所決定，所以 π 如果存在必是唯一。

存在性的證明的想法是並不很難的。如果 L 和 L' 在實質上是一樣時，那麼他們的直和 $L\oplus L'$(是一個半單李代數其僅有的單理想是 L,L')應當包含一子代數 D，它和 $L\oplus L$ 的對角子代數 $\{(x,x)|x\in L\}$ 相像，後者在投影：$L\oplus L'\longrightarrow L$ 的作用下和 L 是同構。要造 L

$\oplus L'$ 的子代數D是很容易的：如上，$x_\alpha(\alpha\in\Delta)$ 決定唯一的 $y_\alpha\in L_{-\alpha}$ 使得 $[x_\alpha y_\alpha]=h_\alpha$，又在 L' 中也是一樣。令 D 是由元素 $\bar{x}_\alpha=(x_\alpha, x'_{\alpha'}), \bar{y}_\alpha=(y_\alpha, y'_{\alpha'}), \bar{h}_\alpha=(h_\alpha, h'_{\alpha'})$ $(\alpha\in\Delta, \alpha'\in\Delta')$ 衍生的子代數。

主要的難題是如何證明D為眞子代數；很容易想像到的一件事是D可能包含如 $(x_\alpha, x'_{\alpha'})$ 和 $(x_\alpha, 2x'_{\alpha'})$ 的元素，其中 $x_\alpha\in L_\alpha, x'_{\alpha'}\in L'_{\alpha'}$ 而 $\alpha\in\Delta, \alpha'\in\Delta'$，在此情形下，$D$ 將會包含 L' 的一切元素，於是包含L的一切元素，因此包含整個$L\oplus L'$（讀者自己能够很容易地證明這一件事）。如想直接地證明上面的情形是不可能發生將會是很困難的一件事，所以我們將間接地進行。

因為L, L' 是單純的，所以Φ和 Φ' 是既約的（命題 14.1)。因此，Φ，Φ' 有唯一的極大根β, β'（關於Δ, Δ')，他們在給定的同構 $\Phi\longrightarrow\Phi'$ 下當然是互相對應的((10.4)的引理A)。選取任意非零$x\in L_\beta, x'\in L'_{\beta'}$。置 $\bar{x}=(x, x')\in L\oplus L'$ 而且令M是由一切的 (*) $ad\,\bar{y}_{\alpha_1}ad\,\bar{y}_{\alpha_2}\cdots\cdots ad\,\bar{y}_{\alpha_m}(\bar{x})$，其中 $\alpha_i\in\Delta$（允許重複）所衍生的子代數。顯然 (*) 屬於 $L_{\beta-\Sigma\alpha_i}\oplus L'_{\beta'-\Sigma\alpha'_i}$；特別，$M\cap(L_\beta\oplus L_{\beta'})$ 是一維的，所以M是$L\oplus L'$ 的眞子空間。

我們主張 $[D, M]\subset M$。為證明此事我們考慮D的生成元。依定義，$ad\,\bar{y}_\alpha(M)\subseteq M$ $(\alpha\in\Delta)$，又基於 $[h, y_\alpha]$ 是 y_α 的倍數所以利用數學歸納法我們也得知 $ad\,\bar{h}_\alpha(M)\subseteq M$。他方面，對於單根$\alpha$，我們知道 $[x_\alpha, y_\gamma]=0$ $\forall\gamma\neq\alpha$，$\gamma\in\Delta$，蓋因$\alpha-\gamma\notin\Phi$之故（引理 10.1)。如果我們將 $ad\,\bar{x}_\alpha$ 應用到 (*) 上，則當$\gamma\neq\alpha$時，$ad\,\bar{x}_\alpha$ 跟 $ad\,\bar{y}_\gamma$ 是可以交換，如果$\gamma=\alpha$時則多出一個額外項（$ad\,\bar{h}_\alpha$ 的某一倍數）。但是對這種項我們已處理過。因為每當 $\alpha\in\Delta, ad\,\bar{x}_\alpha(\bar{x})$（由$\beta$的極大性，$\alpha+\beta\notin\Phi$），我們終於證明了 $ad\,\bar{x}_\alpha(M)\subseteq M$。

現在D顯然是一個眞子代數：否則M將成為 $L\oplus L'$ 的一個非零

眞理想，但是 L, L' 是僅有的這一型理想（定理 2.5），而且$M \neq L, M \neq L'$ 是很顯然的。

我們主張由D投影至 $L \oplus L'$ 的第一及第二因子是（李代數）同構。由一般原則知這些投影是李代數同態，又由以上的命題及D的建構法我們知道這些投影是蓋型的。他方面，假定$D \cap L \neq 0$（投影至第二因子上的核）。這是說D包含某一$(w, 0), w \neq 0$；所以 D 也包含一切的 $(ad z_{\alpha_1} \cdots\cdots ad z_{\alpha_s}(w), 0), \alpha_i \in \Delta, z_{\alpha_i} = x_{\alpha_i}$ 或 $z_{\alpha_i} = y_{\alpha_i}$。這些元素構成$L$的一個非零理想（由命題），而它必是$L$本身（$L$是單純的）。於是$D$ 包含 L。由對稱性，D 也必包含 L'，因此整個$L \oplus L'$，這是不合的。

最後，我們觀察到，經由D把 x_α 送至 $x'_{\alpha'}(\alpha \in \Delta)$ 以及 h_α 送至 $h'_{\alpha'}$，而得的同構$L \longrightarrow L'$ 在H上的作用和 π 是一致的而這正是所要證明的。

這定理很容易推廣至半單李代數（習題 1）。在此我們也說明一下，上面的命題建議我們另一個更有力的證明方法，即，以生成元 y_α, $y_\alpha, h_\alpha(\alpha \in \Delta)$ 和適當關係式寫下 L 的明確表示，而這些關係式的選取方式是使所牽涉的常數只與根系相關。那麼任意其他的單代數 L，如果它的根系和Φ是同構則自動地和L是同構。事實上，這個證明將在充分的準備之後才在第十八節提出；它是較深奧的，不過它有些好處那就是它同時也引出了半單李代數的存在定理。

14.3. 自同構

同構定理可以用來證明半單李代數L（H, Φ 如前）的自同構的存在性：Φ的任何自同構決定了H的一個自同構，而後者可以擴張至L。為舉一個有用的例子，可取一映射它將正根送至負根。這顯然是屬於 $Aut\Phi$（參考習 12.6），而且在 H 上引出一個映射把 h 送至

$-h$。特別，如果$\sigma: H \to H$是這個同構時，$\sigma(h_\alpha)=-h_\alpha$，根據命題 8.3(g) $-h_\alpha$ 和 $h_{-\alpha}$ 是一樣的。爲應用定理 14.2，我們令 x_α 對應到$-y_\alpha$ ($\alpha \in \Delta$)。（注意，L_α 中滿足 $[-y_\alpha, z]=h_{-\alpha}$ 的唯一元素子正是$-x_\alpha$。）根據定理，σ 擴張成L的一個自同構它把 x_α 送至$-y_\alpha$ ($\alpha \in \Delta$)。由前面括弧內的註釋得知 y_α 也被送至$-x_\alpha$($\alpha \in \Delta$)。不僅如此，σ^2 固定L的衍生集因此 $\sigma^2=1$。總結以上就得:

命題 L如定理 14.2 所述（但不必是單純的）。固定非零的$x_\alpha \in L_\alpha$ ($\alpha \in \Delta$) 並且令 $y_\alpha \in L_{-\alpha}$ 滿足 $[x_\alpha y_\alpha]=h_\alpha$。那麼存在$L$ 的一個自同構 σ, $\sigma^2=1$ 而且 $\sigma(x_\alpha)=-y_\alpha$, $\sigma(y_\alpha)=-x_\alpha$ ($\alpha \in \Delta$), $\sigma(h)=-h$ ($h \in H$)。

對於$L=sl(2, \mathrm{F})$ 來說，自同構σ已在 (2.3) 中討論過。Φ的 Weyl 羣提供了Φ的大部份自同構 (12.2)。定理 14.2 主張L有自同構他們擴張了$\mathscr{W}$在H上的作用。如果$\sigma \in \mathscr{W}$，則 σ 可以擴張成爲L的自同構它一定把 L_β 映至 $L_{\sigma\beta}$。（當然，對牽涉到的係數有不同的調整方法。）對於這樣的自同構，我們也可以應用 (2.3) 的討論直接地造出而不需要定理14.2。爲此，我們只要考慮鏡射 $\sigma_\alpha(\alpha \in \Phi)$ 就可以了。因爲 $x_\beta(\beta \in \Phi)$是冪零的，所以可以定義內自同構 $\tau_\alpha = exp\, ad\, x_\alpha\, exp\, ad(-y_\alpha) exp\, ad\, x_\alpha$。這裏 $[x_\alpha, y_\alpha]=h_\alpha$ 跟往常的一樣。τ_α 在H上的作用如何呢? 記 $H=Ker\,\alpha \oplus \mathrm{F}h_\alpha$。顯然，$\tau_\alpha(h)=h \cdot \forall h \in Ker\alpha$ 然而 $\tau_\alpha(h_\alpha)=-h_\alpha$(2.3)。所以 τ_α 和 σ_α 在H上是一致的。不僅如此，τ_α 也將 L_β 送至 $L_{\sigma_\alpha(\beta)}$。

這種以 $IntL$ 的元素表示鏡射（因而是$\mathscr{W}$的任意元素）的方法有一不可避免的缺陷: 在一般情形下，這個方法不能將$\mathscr{W}$ 從 $IntL$ 中實現出來（參考習題 5）。

習　題

1. 試將定理 14.2 推廣至L爲半單的情形。

2. 令 $L=sl(2,\mathbf{F})$。如果 H,H' 是L的兩個極大環面子代數，試證存在一個L的自同構把H映至 H' 上。

3. 對定理 14.2 的證明當中所介紹的$M\subset L\oplus L'$，試證如果適當地選取x和 x' 時，則$M=D$。

4. 令σ如命題 14.3 所述。對於非單根α，是否 $\sigma(x_\alpha)=-y_\alpha$ 其中 $[x_\alpha, y_\alpha]=h_\alpha$?

5. 考慮 A_2 型的單線李代數 $sl(3,\mathbf{F})$。試證在 Int 中由自同構 τ_α((14.3)) 衍生的子羣確實是比 Weyl 羣（這裏是 $\mathscr{S}_3$）大。〔將 $Int\,L$ 看成是一矩陣羣而且明確地計算 $\tau_\alpha{}^2$。〕

6. 試利用定理 14.2 在 $Aut\,L$ 中造一個子羣 $\Gamma(L)$ 和Φ的圖自同構羣（12.2）同構。

7. 對每一古典代數（1.2），試說明如何選取元素 $h_\alpha\in H$ 使其對應Φ的一個基底（參考習題 8.2）。

附　註

定理 14.2 的證明是取自 Winter〔1〕。(14.3) 中所討論的自同構σ將在二十五節中用來造L的「Chevalley」基底（也參考習題 25.7）。

15. Cartan 子代數

在第十四節中，我們證明了由一半單李代數L及一極大環面子代數H所組成的一對（L,H）在同構的意義下是由其根系Φ所決定的。然而可以想像得到的一件事就是另一個極大環面子代數 H' 可能導致

一個完全不同的根系 Φ'。這在很多實例下當然可以利用第十一節的分類排除掉，蓋因 $dim\,L = rank\Phi + Card\,\Phi$ 之故。然而從這一觀點並不能分清 B_l 和 C_l。

爲了證明L能獨自地決定Φ這一件事，只要證明L所有的極大環面子代數在 $Aut\,L$ 的作用下是共軛就確實足够了。我們將在第十六節中證明這一件事，不過我們將考慮更一般的情形，在此情形中L是任意李代數而類似H的角色是所謂「Cartan子代數」。這更一般的考慮使我們能够展示可解李代數的特殊性質因而使整個證明更容易些。在這一節裡我們做一些準備工作；在此除非特別提到其他的情形。否則$\mathbf{F}$的特徵數是任意的。爲了技術上的方便我們還是假定$\mathbf{F}$是代數封閉的，不過這也可以減弱的：爲了主要的結果我們只須要求 $Card\mathbf{F}$ 和 $dim\,L$比起來不會是「太小」就可以了。

15.1 L關於 $ad\,x$ 的分解

複習一下（4.2）我們知到如果 $t \in End V$（V 是有限維向量空間），那麼$V = \amalg V_a$，其中 a 是 t 的固有値，$V_a = Ker(t - a\cdot I)^m$，$m$是 a 的重複數。每一個 V_a 在 t 的作用下保持不變而且 t 在 V_a 上的作用相當於是一個純量 a 和一個冪零自同態的和。

這可以應用到以下的情形：取V爲李代數L，t 爲$ad\,x$, $x \in L$。記$L = \coprod_{a \in F} L_a(ad\,x) = L_0(ad\,x) \oplus L_*(ad\,x)$，在此 $L_*(ad\,x) = \oplus \sum_{a \neq 0} L_a(ad\,x)$。更一般的，如果$K$是$L$的一個子代數其而且$K$在 $ad\,x$ 的作用下保持不變，那麼我們可以記$K = K_0(ad\,x) \oplus K_*(ad\,x)$。卽使$x \notin K$時也還是一樣。

引理 如果a，$b \in \mathbf{F}$，則 $[L_a(ad\,x), L_b(ad\,x)] \subset L_{a+b}(ad\,x)$。特別，$L_0(ad\,x)$ 是L的一個子代數，而且當 $a \neq 0$ 時，$L_a(ad\,x)$的每一元素是 ad-冪零的。

證明：以下的公式是引理 4.2B 的證明中所用的一個公式的特別情形：

$$(adx-a-b)^m[yz]=\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}[(adx-a)^i(y),(adx-b)^{m-i}(z)]。$$

當m是足够大時而且當 $y\in L_a(adx)$, $z\in L_b(adx)$ 時，上式右端各項都是 0，所以 $[y,z]\in L_{a+b}(adx)$。

15.2. Engel 子代數

根據引理 15.1, $L_0(adx)$ 是 L 的一個子代數，其中 $x\in L$。依 D. W. Barnes，我們稱它是一個 Engel 子代數。以下的兩個引理對於 Cartan 子代數的討論來說是基本的知識。

引理 A：令K是L的一個子代數。選取 $z\in K$使得 $L_0(adz)$ 是 $\{L_0(adx)|x\in K\}$ 中的一個極小元素。假定 $K\subset L_0(adz)$。則 $L_0(adz)\subset L_0(adx)$ $\forall x\in K$。

證明：固定任一 $x\in K$，而且考慮L的一自同態族 $\{ad(z+cx)|c\in \mathbf{F}\}$；因爲 $K_0=L_0(adx)$ 是L中包含K的一個子代數，這些自同態保持 K_0 不變，因此也在商空間 L/K_0 上引出自同態。如果T是未定元，我們因而能够將$ad(z+cx)$ 的固有多項式表示成乘積 $f(T,c)g(T,c)$ 其中 $f(T,c),g(T,c)$ 分別是其在 $K_0, L/K_0$ 上的固有多項式。如果 $r=dimK_0$, $n=dimL$，我們能够記 $f(T,c)=T^r+f_1((c)T^{r-1}+\cdots\cdots+f_r(c)$, $g(T,c)=T^{n-r}+g(c)T^{n-r-1}+\cdots\cdots+g_{n-r}(c)$。讀者將會看出（在翻譯成矩陣語言之後）係數 $f_i(c),g_i(c)$ 是C的多項式其次數不會超過 i 。

由定義知，adz 的固有值 0 只發生在子空間 K_0 上，這是說（對於特別情形 $c=0$）g_{n-r} 在$\mathbf{F}$上是不恆爲 0。所以我們能够找到很多

如我們所願的純量而又都不是 $g_{n-r}=0$ 的根；就設 $c_1, c_2, \cdots\cdots c_{r+1}$ 是相異的 $r+1$ 個這種純量。我們說 $g_{n-r}(c)\neq 0$ 也就是說 0 不是 $ad(z+cx)$ 在商空間上的固有值；這使得 $L_0(ad(z+cx))\subset K_0$。但是後者是被選爲極小，所以我們結論 $L_0(adz)=L_0(ad(z+c_ix))$, $1\leq i\leq r+1$。這就說明了 $ad(z+c_ix)$ 在 $L_0(adz)$ 上只有唯一的固有值 0，即 $f(T,c_i)=T^r$。所以多項式 $f_1,\cdots\cdots,f_r$（每一個的次數 $\leq r$）中任何一個都有 $r+1$ 個相異的零 $c_1,\cdots\cdots c_{r+1}$ 這使得每一個多項式恒等於 0。

我們剛證明了 $L_0(ad(z+cx))\supset K_0\ \forall\ c\in \mathbf{F}$。因爲 x 是任意的，現在我們可以 $x-z$ 代替 x，又取 $c=1$ 而得 $L_0(adx)\supset L_0(vdz)$。

引理 B: 如果K是L的子代數，又 K 包含一個 Engel 子代數，則 $N_L(K)=K$。特別，Engel 子代數是自身正規化。

證明: 設 $K\supset L_0(adx)$。則 adx 在 $N_L(K)/K$ 上沒有固有值 0。他方面，如果 $x\in K$，則得 $[N_L(K),x]\subset K$，所以 adx 在 $N_L(K)$ 上的作用是 0。因此 $N_L(K)=K$。

15.3. Ccrtan 子代數

設H是李代數L的一個子代數。如果H是冪零而且$N_L(H)=H$，則稱H是L的一個 Cartan 子代數，簡記爲 CSA。這個定義有一個缺陷那就是對於 CSA 的存在性並沒有交待（事實上，在有限體的情形下，存在性的問題都還沒有完全解決！）。如果L是半單（$char\,\mathbf{F}=0$），則一個極大環面子代數H是交換的（因此是冪零的）。又因爲 $L=H+\coprod_{\alpha\in\Phi} L_\alpha$, $[H,L_\alpha]=L_\alpha$, $\alpha\in\Phi$，所以 $N_L(H)=H$。所以在這情形下，CSA 是存在的（而且扮演一個重要的角色）。更一般的，我們能夠證明：

定理: 令H是李代數L的一個子代數。則H是 CSA 的充要條件

是H爲一個極小 Engel 子代數（特別，CSA 是存在的）。

證明: 首先假定$H=L_0(adz)$ 是 L 的一個 Eugel 子代數，由 (15.2) 的引理 B 知 H 是自身正規化。如果 H 又不包含其他更小的 Engel 子代數，則 (15.2) 的引理A的假設是滿足了(取$K=H$)，所以 $H=L_0(adz)\subset L_0(adx)$ $\forall x\in H$。特別，對所有的 $x\in H, ad_H x$ 是冪零的。所以 (Engel 定理) H是冪零。

反之，令H是L的一個CSA。因爲H是冪零，所以$H\subset L_0(adx)$ $\forall x\in H$。我們想證明至少有一 $x\in H$使得$H=L_0(adx)$。假定相反，這永不會發生。取 $L_0(adz)$, $z\in H$，儘可能是最小的。則又可以應用 (15.3) 的引理A 而得 $L_0(adx)\supset L_0(adz)$ $\forall x\in H$。這是說當H表現在向量空間 $L_0(adz)/H$ 上時，每一$x\in H$都是一個冪零自同態。由(3.3) 知存在$y+H\neq H$ 使得 $[H, x+H]\subseteq H$; 換句話說，存在$y\notin H$使得 $[Hy]\subset H$。這和假設不合。

系: 令 L 是半單的 ($Char\,\mathbf{F}=0$)。則L的 CSA 恰好是L的極大環面子代數。

證明: 我們在定理之前已說明了任何極大環面子代數是一個CSA 反之，令H是一個 CSA。如果$x=x_s+x_n$ 是x在L中的一個 Jordan 分解，則 $L_0(adx_s)\subset L_0(adx)$: 因爲 adx_n 是冪零的而且 $[x_n, x_s]=0$ 所以存在正整數 n 使得 $adx_s^n(y)=0$ 也必存在正整數 m 使得 $adx^m(y)=0$。我們也觀察到，如果 $x\in L$ 是半單的則 adx 是可以對角化的所以 $L_0(adx)=C_L(x)$。現在 CSA H是一極小 Engel 子代數其形式是 $L_0(adx)$ (根據定理)。以上的說明及極小性使得 $H=L_0(adx_s)$。但是 $C_L(x_s)$ 顯然包含 L 的一個極大環面子代數已知是 CSA, 因此也是極小 Engel 子代數。我們得一結論那就是H是一個極大面子代數。

做爲這個證明的一個系，我們注意到一件事那就是一個半單李代

數（$char\mathbf{F}=0$）的一個極大環面子代數的形式必爲 $C_L(s)$，其中 s 是某一半單元素（參考習題 8.7）。這樣的 s 稱爲正則半單。

15.4. 函子的性質

引理 A: 令 $\phi: L \longrightarrow L'$ 是李代數的蓋型同態。如果H是L的一個 CSA，則 $\phi(H)$ 是 L' 的一個 CSA。

證明: 顯然，$\phi(H)$ 是冪零的。令 $A=Ker\phi$，並認同 L' 和 L/A 如果 $[x+A, H+A]\subset H+A$，則 $x\in N_L(H+A)$。但是$H+A$包含一個 CSA（極小 Engel代數: 定理 15.3），所以子代數$H+A$是自身正規化（(15.2) 的引理 B）。所以 $x\in H+A$，即 $\phi(H)$ 是自身正規化。

引理 B: 令 $\phi: L \longrightarrow L'$ 中: 是李代數的蓋型同態。令 H' 是 L' 的 CSA, $K=\phi^{-1}(H)$。則K的任何 CSA H 也是L的一個 CSA。

證明: 由假設知H是冪零的。由前面的引理，$\phi(H)$ 是 $\phi(K)=H'$ 的 CSA，所以$\phi(H)=H'$（因爲 CSA 是極小 Engel 子代數）。如果$x\in N_L(H)$，則 $\phi(x)\in N_{L'}(H')$，因此 $\phi(x)\subset\phi(H)$，或$x\in H+Ker\phi$。但是 $Ker\phi\subset K$（由K的造法），所以$x\in H+K\subset K$。現在$x\in N_K(H)=H$蓋因H是K的一個 CSA 之故。

習　題

1. $sl(n, \mathbf{F})$ 的一個半單元素是正則的充要條件是它的固有值都是相異（即它的最小多項式和固有多項式是一致的）。

2. 令 L 是半單（$char\ \mathbf{F}=0$）。試由習題 8.7 推出 L 中的僅有可解 Engel 子代數就是 CSA。

3. 令L是半單的（$char\ \mathbf{F}=0$）而且 $x\in L$是半單的。試證x是正則的充要條件是x恰好落在一個 CSA 中。

4. 令H是一個李代數L的一個 CSA。試證 H 是極大冪零的，即不是眞的包含在L的任何冪零子代數裡。試證逆命題不成立。

5. 如果 $Card\mathbf{F}\leq dimL$，試說明如何證明 (15.2) 的引理A。

6. 試在 B, C 及 D型 ($char\mathbf{F}=0$) 的古典線性李代數中舉出一些正則半單元素。

附　　註:

在此所用的有關 Cartan 子代數的研究方法大部分是該歸功於 Barnes 〔1〕,

16. 共軛定理

在這一節中。$\mathbf{F}$是假定爲代數封閉的而且其特徵數爲 0 。我們將證明在佈於$\mathbf{F}$上的任何李代數L 中，一切的 CSA 在內自同羣 $IntL$ (由一切 $exp\,ad\,x$， $x\in L$ 是 ad 冪零的，所衍生的羣) 的作用下是共軛的。對於半單李代數L，這是說一切的極大環面子代數是共軛的: 在同構下，相對於L的任一個環面子代數的根系唯一地決定L。爲了要建立一個輔助步驟我們也將證明L所有的極大可解子代數是共軛的。

16.1. 羣 $\mathscr{E}(L)$

令L爲一李代數。對於$x\in L$，如果存在$y\in L$以及$ad\,y$ 的某一零固有值 a 使得 $x\in L_a(ad\,y)$，我們就說x是強 ad 冪零。這使得x成爲 ad冪零 (15.1)，所以所用的名詞是合理的。以 $\mathscr{N}(L)$ 表示L所有的強 ad 冪零元組成的集合，而且以 $\mathscr{E}(L)$ 表示由一切的 $exp\,ad\,x$，$x\in\mathscr{N}(L)$，形成的子羣。$\mathscr{E}(L)\subseteq Int(L)$ 。(注意 $\mathscr{N}(L)$ 在 $AutL$ 的作用下保持不變，所以 $\mathscr{E}(L)$ 是 $AutL$ 的正規子羣。)

由於 $\mathscr{E}(L)$ 有較好的函子性質，所以我們寧願考慮 $\mathscr{E}(L)$ 而不願考慮整個 $Int(L)$。（事實上，當L是半單時，$\mathscr{E}(L)=Int(L)$；參考(16.5)。）譬如，如果K是L的一個子代數，則$\mathscr{N}(K)\subset\mathscr{N}(L)$是顯然的。這使我們能够在 $\mathscr{E}(L)$ 中定義一個由所有的 $exp\ ad_Lx$, $x\in\mathscr{N}(K)$，衍生的子羣 $\mathscr{E}(L;K)$。只要將 $\mathscr{E}(L;K)$ 限制在K上就得 $\mathscr{E}(K)$。相反的，如果我們取任意 $x\in K$使得 $ad_K x$ 是冪零的，我們是無法控制$ad_L x$，所以在 $IntK$ 和 $IntL$ 之間沒有這樣的關係。

顯然，如果$\varphi: L\longrightarrow L'$ 是一蓋型同態，而且 $y\in L$，則 $\phi(L_a(ad\,y))=L_a(ad\phi(y))$。由此我們得：$\phi(\mathscr{N}(L))=\mathscr{N}(L')$。

引理：令ϕ：$L\longrightarrow L'$ 是一個蓋型同態。如果 $\sigma'\in\mathscr{E}(L')$，則存在$\sigma\in\mathscr{E}(L)$ 使得以下圖示是交換的：

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\phi} & L' \\ \sigma\downarrow & & \downarrow\sigma' \\ L & \xrightarrow[\phi]{} & L' \end{array}$$

證明：我們只要證明 $\sigma'=expad_Lx', x'\in\mathscr{N}(L')$ 這一種情形就可以了。由前面的說明，至少存在一個$x\in\mathscr{N}(L)$ 使得 $x'=\phi(x)$。對於任意的 $z\in L$, $(\phi\circ expad_Lx)(z)=\phi(z+[xz]+1/2[x[xz]]+\cdots\cdots)=\phi(z)+[x'\phi(z)]+(1/2)[x'\phi(z)]]+\cdots)=(expad_{L'}x'\circ\phi)(z)$。換句話說，圖示是交換的。

16.2. CSA 的共軛性（可解的情形）

定理：令L是可解的，$\mathscr{E}(L)$ 如（16.1）中所述的。則L的任意兩個 CSA H_1 及 H_2 在 $\mathscr{E}(L)$ 下是共軛的。

證明：利用數學歸納法，如果 $dimL=1$（或L是冪零的）則定理顯然是成立的。假定L不是冪零的。因爲L是可解的，所以L具有

非零交換理想（即導來鏈的最後一個非零項）；選取A使得其維數儘可能是最小的。置 $L'=L/A$。並且以 $\phi: L\longrightarrow L/A$ 表示自然映射它把x送至 x'。根據（15.4）的引理A, H_1'，和 H_2' 是 L' 的兩個 CSA。由歸納法，知存在 $\sigma'\in\mathscr{E}(L')$ 把 H_1' 送至 H_2'。於是引理 16.1 使我們能求得$\sigma\in\mathscr{E}(L)$使得圖示是交換的。這是說σ把 $K_1=\phi^{-1}(H_1')$ 映至$K_2=\phi^{-1}(H_2')$ 上。但是現在 H_2 和 $\sigma(H_1)$ 兩者都是 K_2 的 CSA。如果 $K_2\subsetneq L$，由歸納法假設，我們能求得 $\tau'\in\mathscr{E}(K_2)$ 使得 $\tau'\sigma(H_1)=H_2$； 但是 $\mathscr{E}(K_2)=\mathscr{E}(L;K_2)|_{K_2}$，所以這是說 $\tau\sigma(H_1)=H_2$，其中$\tau\in\mathscr{E}(L)$ 而 $\tau|_{K_2}=\tau'$ 故得證。

不然，我們必有$L=K_2=\sigma(K_1)$， 所以 $K_1=K_2$ 而且 $L=H_1+A=H_2+A$。爲處理這一種情形，我們必須明確地造出L的一個自同構σ（這是整個討論過程中我們必須這樣做的唯一重點)。CSA H_2 的形式是 $L_0(ad\,x)$，x是 L 的一個適當元素定理 15.3 。由於 A 是 $ad\,x$-不變， 所以 $A=A_0(ad\,x)\oplus A_*(ad\,x)$（參考（15.1））， 而且每一個分量在 $L=H_2+A$的作用下都保持不變。由A 的最小性，我們知 $A=A_0(ad\,x)$ 或者 $A=A^*(ad\,x)$。 第一種情形是荒謬的蓋因它使得 $A\subset H_2$，所以$L=H_2$ 這和L不是冪零的假設不合。所以$A=A^*(ad\,x)$，因此 $A=L^*(ad\,x)$ 是很明顯的。

因爲 $L=H_1+A$，所以我們有 $x=z+y$ 的表示法，其中 $x\in H_1$, $y\in L^*(ad\,x)$。利用 $ad\,x$ 在 $L^*(vd\,x)$的作是可逆的事實，我們有 $z=[x, z'], z'\in L^*(ad\,x)$。因爲$A$是可交換的所以 $(ad\,z')^2=0$，所以 $exp\,ad\,z'=1_L+ad\,z'$；把它應用到x上就得$x-z=y$ 。特別，$H=L_0(ad\,y)$ 也必須是 L的 CSA 。因爲 $y\in H_1$, $H\supset H_1$ 所以 $H=H_1$（兩者都是極小 Engel 子代數）。所以在 $exp\,ad\,z'$ 的作用下 H_1 和 H_2 是共軛的。

現在我們只要證明 $exp\,ad\,z'\in\mathscr{E}(L)$ 就可以了： z' 可以寫成A

$=L^*(adx)$ 中的某些元素 z_i 的和，這些元素是互相交換的（A是可交換的），所以 $expadz'=\prod cxpadz_i\in\mathscr{E}(L)$。

16.3. Borel 子代數

為了從可解的情形超越到一般情形，我們利用一個李代數的 Borel 子代數，它依定義是極大的可解子代數。如果我們能夠證明L的兩個 Borel 子代數在 $\mathscr{E}(L)$ 的作用下是共軛的話，那麼由定理 16.2 就得知L所有的 CSA 是共軛。

引理 A 如果B是L的一個 Borel 子代數，則 $B=N_L(B)$

證明 設$x\in L$,$[xB]\subset B$。則$B+\mathbf{F}x$ 是 L的一個子代數。因為 $[B+\mathbf{F}x,B+\mathbf{F}x]\subset B$，所以$B+\mathbf{F}x$ 是可解。但是B是一個極大可解子代數，所以$x\in B$。

引理 B 如果 $RadL\neq L$，則L的 Borel 子代數和 $L/RadL$ 的 Borel 子代數之間有 1-1 對應。

證明 因為 $RadL$ 是L的可解理想，所以對L的任何 Borel 子代數B, $B+RadL$ 是可解的，卽 $RadL\subset B$（由極大性）。所以引理立刻得證。

由引理B我們知道所須處理的實質情形是半單李代數L。在這個處境下，令H是 CSA, Φ是L關於 H 的一個根系。固定一個基底及由此基底所定的正根集合。置 $B(\Delta)=H+\coprod_{\alpha\succ 0}L_\alpha$, $N(\Delta)=\coprod_{\alpha\succ 0}L_\alpha$。於是我們知道 $B(\Delta)$ 是L的一個子代數而且以 $N(\Delta)$ 為其導子代數。又$N(\Delta)$ 是冪零的：如果$x\in L_\alpha(\alpha\succ 0)$，則將 adx 作用於正高度根（關於Δ）的根向量時，其結果是高度至少增加 1；這說明了如何使降中心鏈趨近 0 。現在得知 $B(\Delta)$是可解的。事實上，我們主張 $B(\Delta)$ 是一個 Borel 子代數：實際上，令K是L的子代數而且$K\supsetneq B(\Delta)$。

則因爲K在H的作用下保持不變，所以必包含某一 L_α, $\alpha \prec 0$。但這使得K也包含一個單代數 S_α；特別，K是不可解的。

引理 C 令L是半單，H是 CSA 及 Φ 是根系。對於每一基底 $\Delta\subset\Phi$, $B(\Delta)$ 是L的一個 Borel 子代數（叫做關於 H 的標準 Borel 子代數）。在L中關於H的一切標準 Borel 子代數在 $\mathscr{E}(L)$ 的作用下是共軛。

證明 只要證明第二個命題。記得（14.3）中證明了一件事，那就是作用於H上的一個鏡射 σ_α 可以擴張成L的一個內自同構 τ_α，而且 $\tau_\alpha\in\mathscr{E}(L)$。顯然此自同構將 $B(\Delta)$ 送至 $B(\sigma(\Delta))$。但是 Weyl 羣是由這些鏡射衍生的，所以我們知道 $\mathscr{E}(L)$ 對於關於 H 的標準 Borel 子代數是有傳遞作用。

16.4. Borel 子代數的共軛性

定理 任意李代數L的所有 Borel 子代數在 $\mathscr{E}(L)$ 的作用下是共軛的。

系 任意李代數L的所有 Cartan 子代數在 $\mathscr{E}(L)$ 的作用下是共軛的。

系的證明 令H, H'是L的兩個CSA。由於是冪零的（因此是可解的），所以每一個至少落在一個 Borel 子代數中，就說是B和 B'（分別包含H, H'）。由定理，存在一個$\sigma\in\mathscr{E}(L)$ 使得 $\sigma(B)=B'$。現在$\sigma(H)$ 和 H' 兩者都是可解代數B' 的 CSA，所以由定理 16.2，存在 $\tau'\in\mathscr{E}(B')$使得 $\tau'\sigma(H)=H'$ 但是，$\tau'=\tau|_{B'}$，其中 $\tau\in\mathscr{E}(L;B')\subset\mathscr{E}(L)$(16.1)，所以最後得 $\tau\sigma(H)=H'$，而且$\tau\sigma\in\mathscr{E}(L)$。

定理的證明 我們利用歸納法證明。如果 $dim L=1$ 則是自明的。又由引理 16.1 和 16.3B 以及歸納法假設，我們可以假設L是半單。我們可以更進一步的假定B是關於某一 CSA 的一個標準 Borel 子代

數。我們必須證明任何其他的 Borel 子代數 B' 在 $\mathscr{E}(L)$ 的作用下都跟B是共軛的。如果 $B\cap B'=B$，則無須證明（因爲極大性使得 $B'=B$）。所以我們也可以對 $dim(B\cap B')$ 作第二（向下）歸納。換句話說，如果有一標準 Borel 子代數 B_1，跟任何其他的 Borel 子代數 B_1'，使得 $dimB_1\cap B_1'>dim B\cap B'$ 時，則由第二歸納的假設我們得知 B_1 和 B_1' 是共軛的。我們現在可假定 $B\cap B'\subsetneq B, B'$ 而且B是關於某個 CSA 的標準 Borel 子代數。

(1) 首先假定$B\cap B'\neq 0$。此時會發生兩種情形。

(i) $B\cap B'$ 所有的冪零元數形成的集合 N' 不爲零。我們主張 N' 事實上是 $B\cap B'$ 的一個理想：它顯然是一個子空間，而且如果 $x\in B\cap B'$, $y\in N'$，則 $[xy]\in[B\cap B'B\cap B']$，而依（4.1）跟系 C 知 $[B\cap B',B\cap B']$ 是由冪零元素組成。N' 當然不是L的一個理想，所以它的正規化子K是L的一個眞子代數。

其次我們證明 $B\cap B'\subseteq B\cap K\cap B'\cap K$。考慮 adN' 在 $B/B\cap B'$ 的作用。每一$x\in N'$ 在此空間的作用是冪零的，所以由定理 3.3 知必存在一非零元素$y+(B\cap B')$ 使得$[x, y+(B\cap B')]\subset B\cap B'$ $\forall x\in N'$，即使得 $[xy]\in B\cap B'$, $y\notin B\cap B'$。但是 $[x, y]\in[BB]$，所以是冪零：這使得 $[x, y]\in N'$ 或者說 $y\in N_B(N')=B\cap K$，然而$y\notin B\cap B'$。同理$B\cap B'\subsetneq B'\cap K$。

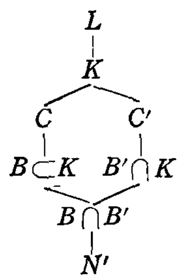


圖　一

他方面，$B\cap K$ 跟 $B'\cap K$ 是K的可解子代數。令 C, C' 分別是在K中包含$B\cap K, B'\cap K$的 Borel 子代數（圖一）因爲$K\neq L$，由歸納法得 $\sigma\in\mathscr{E}(L;K)\subseteq\mathscr{E}(L)$ 使得 $\sigma(C')=C$，因爲，$B\cap B'\subsetneq C\cap C'$。所以由第二歸納法假設得知存在 $\tau\in\mathscr{E}(L)$ 使得 $\tau\sigma(C')\subset B$（即 τ 把L中包含 $\sigma(C')=C$ 的一個 Borel 子代數送至B上)。最後，$B\cap\tau\sigma(B')\supset\tau\sigma(C')\cap\tau\sigma(B')\supset\tau\sigma(B'\cap K)\supset\tau\sigma(B\cap B')$，所以前者的維數比 $B\cap B'$ 的大。再一次，由第二歸納法假設，我們知道在 $\mathscr{E}(L)$ 的作用下B和 $\tau\sigma(B')$ 是共軛的，故得證。

(ii) $B\cap B'$ 沒有非零冪零元素。注意由命題 4.2 (c) 和引理 16.3A知L的任何 Borel 子代數必包含它的元素的半單部及冪零部。這就證明了$B\cap B'=T$是一環面子代數。現在利用B是標準 Borel 子代數的事實，就說$B=B(\Delta), N=N(\Delta), B=N+H$。因爲$[BB]=N$，而且因爲$T\cap N=0$，顯然 $N_B(T)=C_B(T)$設C是 $C_B(T)$的任何 CSA; 特別, C是冪零而且$T\subset N_{CB(T)}(C)=C$。如果$x\in N_B(C)$，那麼 $x\in B_0(adC)$，特別，$x\in B$。$(adT)=C_B(T)$，所以 $x\in N_{CB(T)}(c)=C$。所以C是B的一個 CSA。由定理 16.2，我們知C是L的一個極大環面子代數而且在 $\mathscr{E}(B)$（因此是 $\mathscr{E}(L)$）的作用下和H是共軛，所以在不失其一般性之下可設$T\subset H$

假定$T=H$。顯然 $B'\supsetneq H$ 所以 B' 至少包含一個 L_α（關於Δ，$\alpha\succ0$）。將 τ_α（參考16.3的引理C）應用到 B' 上就得一個 Borel 子代數 B'' 而且 $B''\cap B\supset H+L_\alpha$; 所以由第二歸納法的假設就得知 B'' 和B是共軛的，故得證。

其次假設$T\subsetneq H$。現在 $[B'T]=0$或$\neq0$。如果 $B'\subset C_L(T)$，則我們能够利用第一歸納法假設，蓋因 $dim\ C_L(T)<dimL$ ($T\neq0$, $Z(L)=0$)。即利用 $H\subset C_L(T)$ 的事實可在 $C_L(T)$ 中求得一個包含H的 Borel 子代數 B''，然後利用歸納法假設求得 $\sigma\in\mathscr{E}(L, C_L(T))$

$\subset \mathscr{E}(L)$ 將 B' 送至 B'' 上。特別，B'' 是L的 Borel 子代數，又$B \cap B'' \supset H$所以由第二歸納法假設知B和 B'' 在 $\mathscr{E}(L)$ 的作用下是共軛的。

現在可假定 $B' \not\subset C_L(T)$。這使我們能够求得 adT 的一個共同固有向量$x \in B'$ 及一個元素 $t \in T$使得 $[tx]=ax$，a是正有理數。定義$S=H+\amalg L_\alpha$，在此$\alpha \in \Phi$又$\alpha(t)$ 是正有理數。S 顯然是L的一個子代數（而且$x \in S$）。又S也是可解的（參考引理 16.3C 的證明）。令 B'' 是在L中包含S的一個 Borel 子代數。現在 $B'' \cap B' \supset T+\mathbf{F}_x \supsetneq T=B' \cap B$，所以 $dim\ B'' \cap B' > dim B \cap B'$。同理，$B'' \cap B \supset H \supsetneq T$，所以 $dim B \cap B'' > dim\ B' \cap B$。第二歸納法假設可用至最後一個不等式上而證明 B'' 和B是共軛的。（特別，存在一個和H是共軛的 CSA 使得 B'' 成爲標準 Borel 子代數）接着第二歸納法假設也可應用到第一個不等式（因爲 B'' 是標準的）去證明 B'' 和 B' 是共軛的。所以B和 B' 是共軛的。

(2) 以上我們處理 $B \cap B' \neq 0$ 的所有情形。現在我們考慮 $B \cap B'=0$。這使得 $dimL \geq dimB+dimB'$；蓋因 B 是標準我們知道 $dimB>(1/2)dimL$，所以 B' 必須是「很小」（卽 $dimB'<(1/2)dimL$)。說得更確切一點，取T是 B' 的一個極大環面子代數。如果 $T=0$，前 B' 是由冪零元素組成；B' 因此是冪零（Engel 定理）。又 B' 是自身正規化的（(16.3)的引理A)，所以 B' 是一個 CSA。但是這是很荒謬的因爲我們知道（系 15.3）L的一切CSA是環面子代數。所以$T \neq 0$。如果 H_0 是在L 中包含 T 的一個極大環面子代數，則B' 和關於 H_0 的任何標準 Borel 子代數 B'' 的交集不爲零。所以由前一部分的證明得知 B' 和 B'' 是共軛的，所以 $dimB'=dimB''>(1/2)dimL$ 這是不可能的。

系 16.4 使我們能够在佈於$\mathbf{F}$上的任何李代數上附上一個數值不

變量（叫做秩），即 L 的 CSA 的維數。當 L 是半單時，$rankL=rank\Phi$，Φ是L關於任何極大環面子代數（$=CSA$）的根系。

Borel 子代數的共軛定理有一個值得一提的附屬結果。令L是半單的，H是 CSA ，Φ是根系。我們主張在L中包含H的任何 Borel 子代數B是標準的。事實上，令 $\sigma(B(\Delta))=B$， 其中Δ是Φ的某一已知基底，$\sigma\in\mathscr{E}(L)$。因爲 $\sigma(H)$ 和 H是 B的兩個 CSA，所以在$\mathscr{E}(L;B)\subseteq\mathscr{E}(B)$ 的作用下是共軛的（定理 16.2），所以我們也可以假定 $\sigma(H)=H$。那麼顯然對於$\alpha\succ 0$，顯然 $\sigma(L_\alpha)=L_{\sigma\alpha}$，$\sigma\alpha$ 是一個根。不僅如此，α在根上的排列作用保持和，所以 $\sigma(\Delta)=\Delta'$ 也是Φ的一個基底而且 $B=B(\Delta')$ 是標準的。

16.5. 自同構羣

令L是半單的，H是L的一個是 CSA, Φ根系以及Δ是一個固定基底。如果τ是L的一個自同構，那麼 $\tau(B)$, $B=B(\Delta)$，是L的另一個 Borel 子代數，所以存在 $\sigma_1\in\mathscr{E}(L)$使得$\sigma_1\tau(B)=B$（定理 16.4）。現在$H$和 $\sigma_1\tau(H)$ 是L的兩個 CSA（因此也是B的兩個CSA），所以我們能够求得 $\sigma_2\in\mathscr{E}(L;B)\subset\mathscr{E}(L)$ 使得 $\sigma_2\sigma_1\tau(H)=H$ （而且$\sigma_2(B)=B$）（定理 16.2）。因爲 $\sigma_2\sigma_1\tau$ 同時保持H和B不變，所以它在Φ上引出一個自同構而且此自同構保持Δ不變。由（12.2）我們得知所有這樣的自同構；這些就是圖自同構羣，他們只當Φ是（既約）$A^l(l>1)D_l, E_6$ 等型才不會是 1 。令ρ是在L上與之對應的一個自同構（參考習題 14.6）。因爲ρ並不是唯一的，我們可以調整所牽涉到常數使得 $\rho\sigma_2\sigma_1\tau(x_\alpha)=c_\alpha x_\alpha(\alpha\succ 0)$, $\rho\sigma_2\sigma_1\tau(y_\alpha)=c_\alpha^{-1}y_\alpha$，因而$\rho\sigma_2\sigma_1\tau(h_\alpha)=h_\alpha$（因此所有都的$h$送至其本身）。結論是$\tau$和羣$\mathscr{E}(L)\Gamma(L)$中的一個元素只差一個對角自同構，即一個自同構在$H$上是恆等的而在每一個根空間 L_α 上是一個純量乘積。

我們可以證明（參考 Jacobson〔1〕, 278 頁）一個對角自同構永遠是內自同構；事實上，由其造法可以看出它是落在 $\mathscr{E}(L)$ 中。不僅如此，乘積 $Aut L = Int L\ P(L)$ 是一個半直積 (Jacobson〔1〕, 第九章的習題)，所以特別 $\mathscr{E}(L) = Int(L)$。讀者也能在 Jacobson 書中找到各種單李代數的自同構的詳細描述。

習　題

1. 試證 $\mathscr{E}(L)$ 只包含 1 的充要條件是 L 為冪零。

2. 令 L 是半單，H 是 CSA，Δ 是 Φ 的一個基底。試證 L 中任何由冪零元素組成的極大子代數在 $\mathscr{E}(L)$ 的作用下和 $N(\Delta)$ 是共軛的，其中 $N(\Delta)$ 是 $B(\Delta)$ 的導代數。

3. 令 Ψ 是一閉根集（如果 $\alpha, \beta \in \Psi$，而且 $\alpha + \beta \in \Phi$ 則得 $\alpha + \beta \in \Psi$）而且滿足 $\Psi \cap -\Psi = \phi$。試證，對於 Ψ 的某一基底來說 Ψ 的根都是正根。〔利用習題 2。〕（這個習題是屬於根系理論，但是利用李代數較容易做。）

4. 當 $L = sl(2, \mathbf{F})$ 時，定理 16.4 可如何簡化呢?

5. 令 L 是半單。試證 L 的兩個 Borel 子代數恒包含 L 的一個 CAS

6. 令 L 是半單，$L = H + \amalg L_\alpha$ 如果 P 是 L 的子代數而且包含某一 Borel 子代數時則稱 P 是 L 的一個拋物子代數。（在此情形下，由引理 15.2B 知 P 是自身正規化。）固定一個基底 $\Delta \subset \Phi$，而且置 $B = B(\Delta)$。對於每一子集 $\Delta' \subset \Delta$，定義 $P(\Delta')$ 是由 L 中一切的 $L_\alpha (\alpha \in \Delta$ 或 $-\alpha \in \Delta')$ 及 H 衍生的子代數

(a) $P(\Delta')$ 是 L 的一個拋物子代數（稱為關於 Δ 的標準拋物子代數）

(b) L 中每一個包含 $B(\Delta)$ 的拋物子代數都具有 $P(\Delta')$ 的形式，

其中$\Delta'\subset\Delta$〔利用引理 10.2A 的系和命題 8.4(d)。〕

(c) 試證在$\mathscr{E}(L)$的作用下L的每一個拋物子代數和一個$P(\Delta')$是共軛的。

7. 令$L=sl(2,\mathbf{F})$，而其標準基底是(x,h,y)。對 $c\in\mathbf{F}$ 記 $x(c)=exp\ ad(cx)$，$y(c)=exp\ ad(cy)$。定義內自同構 $w(c)=x(c)y(-c^{-1})x(c)$，$h(c)=w(c)w(1)^{-1}(=w(c)w(-1))$，$c\neq0$。試計算 $w(c)$, $h(c)$ 關於L的已知基底的矩陣，並且由此推論L的一切對角自同構 (16.5) 是內自同構。在此情形下，結論 $AutL=IntL=\mathscr{E}(L)$。

8. 令L是半單。試證L的一個半單元素是正則的充要條件是它只落在有限個 Borel 子代數中。

附　註

定理 16.4 的證明是取自 Winter〔1〕(一部分是得自 D. G. Mostow 的影響)；也請參考 Barnes〔1〕。大部分的「老」證明是利用解析方法($\mathbf{F}=\mathbf{C}$) 或一些代數幾何：參考 Chevlley〔2〕, Jacobson〔1〕Seminaire "Sophus Lie"〔1〕，Serre〔2〕，關於自同構羣的詳細報導讀者可參考 Jacobson〔1〕Seligman〔1〕。

第五章　存在定理

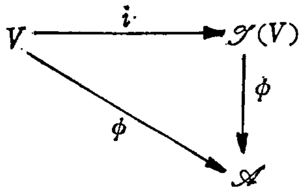
17.　泛包絡代數

在這一節中 **F** 可以是一個任意體（除非特別提到其他的情形）。我們將對於佈於 **F** 上的每一個李代數 L 結合一個具有么元的結合代數 $\mathfrak{U}(L)$（一般是無窮維的），它是在受制於 L 中的交換關係儘可能「自由地」由 L 衍生的結合代數。這個「泛包絡代數」是表現理論中的一個基本工具。雖然在第一章我們就能立刻地介紹它，但是爲了避免證明 Poincare-Birkhoff-Witt 定理時所引出的煩人的工作，我們寧願延到眞正需要它的時刻才做。讀者可以暫時忘掉關於半單李代數的一切特殊的理論。

17.1.　張量與對稱代數

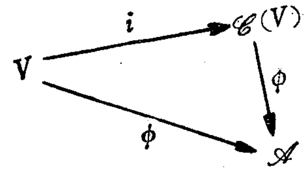
首先我們介紹幾個由泛性所定義的代數。（讀者可在 S. Lang, Algebra, Reading, Mass., Addison-Wesley 1965, Ch. XVI. 中找到更詳細的討論。)固定一個佈於**F** 上的有限維向量空間 V。令 $T^0V=\mathbf{F}$, $T^1V=V$, $T^2V=V\otimes V$, ……, $T^mV=V\otimes\cdots\cdots\otimes V$（$m$ 個 V）。定義 $\mathscr{T}(V)=\coprod_{i=0}^{\infty}T^iV$，而在 $\mathscr{T}(V)$ 的齊次生成元上介紹一個結合的乘積: $(v_1\otimes\cdots\cdots\otimes v_k)(w_1\otimes\cdots\cdots\otimes w_m)=v_1\otimes\cdots\cdots\otimes v_k\otimes w_1\otimes\cdots\cdots\otimes w_m\in$

$T^{k+m}V$ 這使得 $\mathscr{T}(V)$ 成爲一個具有么元 1 的賦次代數，它是由 1 和 V 的任何基底所衍生的。我們稱它是 V 上的張量代數。$\mathscr{T}(V)$ 有以下的泛性：給定任何 $\mathbf{F}$-線性映射 $\phi: V \longrightarrow \mathscr{A}$（$\mathscr{A}$ 是佈於 $\mathbf{F}$ 上具有 1 的結合代數），則存在一個唯一的 $\mathbf{F}$ 代數同態 $\psi: \mathscr{T}(V) \longrightarrow \mathscr{A}$ 使得 $\psi(1)=1$ 而且也使得以下的圖示是交換的（i ＝包含）：



在此泛性下，我們說 $\mathscr{T}(V)$ 是 n 個生成元上的泛結合代數（$n=dim$-V）

其次，令 I 爲由 $\mathscr{T}(V)$ 中一切的 $x\otimes y - y\otimes x$ $(x, y\in V)$ 生成的(雙側)理想而且稱 $\mathfrak{S}(V)=\mathscr{T}(V)/I$ 爲 V 上的對稱代數；$\sigma: \mathscr{T}(V) \longrightarrow \mathfrak{S}(V)$ 表示自然映射。注意，I 的生成元落在 T^2V 中；這使得等式 $I=(I\cap T^2V)\otimes(I\cap T^3V)\otimes\cdots\cdots$ 看起來是顯然的。所以 σ 在 $T^0V=F, T^1V=V$ 上是一嵌射（使我們能够將 V 看成 $\mathfrak{S}(V)$ 的一個子空間），而且 $\mathfrak{S}(V)$ 承襲了 $\mathscr{T}(V)$ 的次；$\mathfrak{S}(V)=\coprod_{i=0}^{\infty} S^iV$。除去 I 的作用是使 V 的元素可以交換；所以 $\mathfrak{S}(V)$ 具有以下的泛性：對任何 $\mathbf{F}$-線性映射 $\phi: V \longrightarrow \mathscr{A}$（$\mathscr{A}$ 是佈於 $\mathscr{F}$ 上且具有 1 的交換，結合代數），都存在一唯一的 $\mathbf{F}$-代數同態 $\psi: \mathfrak{S}(V) \longrightarrow \mathscr{A}$ 使得 $\psi(1)=1$ 而且以下的圖示交換（i ＝包含）不僅如此，如果 $(x_1, \cdots\cdots, x_n)$ 是 V 的一組固定的基底，那麼 $\mathfrak{S}(V)$ 自然地和佈於 $\mathbf{F}$ 上的 n 變數的多項式代數，其基底是 1 及一切的 $x_{i(1)}\cdots\cdots x_{i(t)}$，$t\geq 1$，$1\leq i(1)\leq \cdots\cdots \leq i(t)\leq n$，是同構的。



即使V是無限維時讀者也能够容易地證明前面所述的建構還是行得通。

爲了後面的應用（第 23 節）我們提出一個 $char\,\mathbf{F}=0$ 的特殊事實。對稱羣 $\mathscr{S}_m$ 可作用於 T^mV 上，其作用的方式是對一個張量 $v_1\otimes\cdots\cdots\otimes v_m(v_i\in V)$ 的足標作排列。T^mV 中被 $\mathscr{S}_m$ 所固定的元素稱爲m次的齊次對稱張量。譬如：$x\otimes y+y\otimes x$（2 次）。固定V的一組基底$(x_1,\cdots\cdots,x_m)$，則 $x_{i(1)}\otimes\cdots\cdots\otimes x_{i(m)}(1\leq i(j)\leq n)$ 形成 T^mV 的一組基底。對每一有序數列$1\leq i(1)\leq i(2)\cdots\cdots\leq i(m)\leq n$ 定義一對稱張量

$$(*)\qquad \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in\mathscr{S}_m}x_{i(\sigma(1))}\otimes\cdots\cdots\otimes x_{i(\sigma(m))}$$

（這是有意義的因爲在$\mathbf{F}$中 $m!\neq 0$）。這些張量在 S^mV 中的像是不爲零而且形成一組基底，所以張量(*)生成$I\cap T^mV$在T^mV中的一個補空間。他方面，張量(*)生成的向量空間顯然跟由一切m次對稱張量組成的向量空間（稱其爲 $\bar{S}^mV\subset T^mV$）是一樣的。我們得一結論那就是σ定義一個向量空間的同構：$S^mV\longrightarrow S^mV$，因此也定義一個同構：$\mathfrak{S}(V)\longrightarrow\mathfrak{S}(V)$，其中$\mathfrak{S}(V)$是由一切的對稱張量組成的向量空間。

17.2. $\mathscr{U}(L)$ 的建構

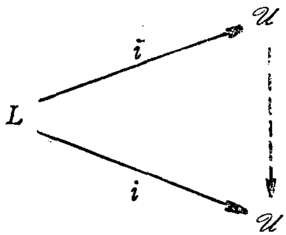
我們由抽象的定義開始，對任何一個李代數L（與往常的情形不

一樣，在此我們容許L爲無限維）如果有一對（$\mathscr{U},i$），其中$\mathscr{U}$是佈於$\mathbf{F}$上而具有1的一個結合代數，$i:L\longrightarrow\mathscr{U}$是一線性映射滿足

$$(*)\qquad i([x,y])=i(x)i(y)-i(y)i(x)\quad \forall x,y\in L,$$

而且以下成立：對任何佈於$\mathbf{F}$上具有1的結合代數$\mathscr{A}$以及任何線性映射；$L\longrightarrow\mathscr{A}$滿足（*），存在一唯一的代數同態$\phi:\mathscr{U}\longrightarrow\mathscr{A}$（$1\rightarrow 1$）使得$\phi\circ i=j$，則稱（$\mathscr{U},i$）是$L$的泛包絡代數。

這種對（$\mathscr{U},i$）的唯一性是容易證明的。給以任何滿足相同假設的對（$\mathscr{B},i'$），我們得同態$\phi:\mathscr{U}\longrightarrow\mathscr{B}$，$\psi:\mathscr{B}\longrightarrow\mathscr{U}$：依定義，存在一唯一的虛線映射使得以下的圖示是交換的：



但 $1_{\mathscr{U}}$ 和 $\psi\circ\phi$ 兩者都有這本領，所以 $\psi\circ\phi=1_{\mathscr{U}}$。同理，$\phi\circ\psi=1_{\mathscr{B}}$

這種對的存在性也不難建立的。令$\mathscr{T}(L)$ 是 L的張量代數（17.1），並且令J是$\mathscr{T}(L)$中由一切的$x\otimes y-y\otimes x-[xy]$（$x,y\in L$）衍生的雙側理想。定義 $\mathscr{U}(L)=\mathscr{T}(L)/J$，而且令 $\pi:\mathscr{T}(L)\longrightarrow\mathscr{U}(L)$是自然同態。注意$J\subset\coprod_{i>0}T^iL$，所以$\pi$把 $T^\circ L=\mathbf{F}$同構地嵌入$\mathscr{U}(L)$（所以 $\mathscr{U}(L)$ 至少包含純量）。不過，π將 T^1L 同構地嵌入$\mathscr{U}(L)$ 這件事卻並不是顯然的，我們將在以後證明之。無論如何，我們主張（$\mathscr{U}(L),i$）是L的一個泛包絡代數，其中 $i:L\longrightarrow\mathscr{U}(L)$ 是π在L上的限制。事實上，令 $j:L\longrightarrow\mathscr{A}$ 如定義。由$\mathscr{T}(L)$ 的泛性得一代數同態$\phi':\mathscr{T}(L)\longrightarrow\mathscr{A}$ 其爲j的擴張而且將1送至1。j

的特殊性質(*)使一切的$x\otimes y-y\otimes x-[x,y]$ 落在 $Ker\phi'$ 中，所以 ϕ: 引出一個同態 $\mathscr{U}(L)\longrightarrow\mathscr{A}$ 使得 $\phi\circ i=j$。ϕ的唯一性是顯然的，蓋因 1 和 Imi 一同生成 $\mathscr{U}(L)$。

範例・令L是可交換的。於是上面的理想J是由一切的$x\otimes y-y\otimes x$生成，因此和(17.1)中所介紹的I是一致的。這是說$\mathscr{U}(L)$和對稱代數 $\mathfrak{S}(L)$ 是一致的。(特別，在此 $j: L\to\mathscr{U}(L)$ 是一單射。)

17.3. *PBW* 定理與其影響

至目前爲止，我們對於 $\mathscr{U}(L)$ 的結構所知不多，僅知道 $\mathscr{U}(L)$ 包含了純量。爲了簡潔起見，我們記 $\mathscr{T}=\mathscr{T}(L)$, $\mathfrak{S}=\mathfrak{S}(L)$, $\mathscr{U}=\mathscr{U}(L)$; 同理也用記號 T^m, S^m。在$\mathscr{T}$上定義$T_m=T^0\oplus T^1\oplus\cdots\cdots\oplus T^m$ 而且令 $U_m=\pi(T_m), U_{-1}=0$。顯然，$U_mU_p\subset U_{m+p}$而且$U_m\subset U_{m+1}$。置 $G^m=U_m/U_{m-1}$ (這只是一個向量空間)，並且令$\mathscr{U}$中的乘法定義一個雙線性映射 $G^m\times G^p\longrightarrow G^{m+p}$。(映射是良好的; 爲什麼?) 這可以馬上擴張成一雙線性映射$\mathfrak{G}\times\mathfrak{G}\longrightarrow\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}=\coprod_{m=0}^{\infty}G^m$ 使 $\mathfrak{G}$ 成爲一個具有 1 的賦次結合代數。

因爲π將 T^m 映至 U_m，所以合成線性映射$\phi_m: T^m\to U_m\to G^m=U_m/U_{m-1}$ 是有意義的。因爲$\pi(T_m-T_{m-1})=U_m-U_{m-1}$，所以$\phi_m$是一蓋射。所以組合映射 ϕ_m 而得一線性映射$\phi:\mathscr{T}\longrightarrow\mathfrak{G}$是一蓋射 (而且將 1 送至 1)。

引理・$\phi:\mathscr{T}\longrightarrow\mathfrak{G}$是一代數同態。不僅如此，$\phi(I)=0$，所以$\phi$引出一個蓋型同態$\omega:\mathfrak{S}=\mathscr{T}/I\longrightarrow\mathfrak{G}$。

證明・令$x\in T^m$, $y\in T^p$ 是齊次張量。依 $\mathfrak{G}$ 中乘法的定義，$\phi(xy)=\phi(x)\phi(y)$ 所以 ϕ 在 $\mathscr{T}$ 上有乘法性。令 $x\otimes y-y\otimes x$ $(x, y\in L)$ 是I的典型生成元。那麼依定義 $\pi(x\otimes y-y\otimes x)\in U_2$。他方面，$\pi(x\otimes y-y\otimes x)=\pi([xy])\in U_1$，因此 $\phi(x\otimes y-y\otimes x)\in$

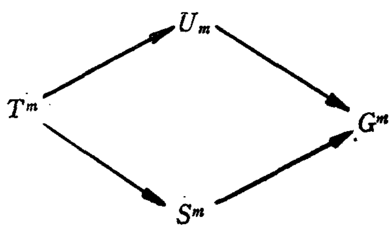
$U_1/U_2=0$。所以 $I\subset Ker\phi$。

以下定理是關於 $\mathscr{U}(L)$ 的基本結果；它（或它的系 C）叫做 Poincare-Birkhoff-Witt 定理（或 PBW 定理）。我們將在（17.4）中敍述其證明。

定理・同態 $\omega:\mathfrak{S}\longrightarrow\mathfrak{G}$ 是一個代數同態。

系A・令 W 是 T^m 的一個子空間。假定自然映射 $T^m\longrightarrow S^m$ 將 W 同構地映上 S^m。那麼 $\pi(W)$ 是 U_{m-1} 在 U_m 中的一個補空間。

證明・考慮圖示（所有的映射都是自然的）：



由以上的引理（以及定義）得知此爲交換圖示。因爲 $\omega:\mathfrak{S}\longrightarrow\mathfrak{G}$ 是一同構（根據定理），所以底下的映射將 $W\subset T^m$ 同構地映上 G^m。轉到頂上的映射，系 A 就得證。

系B・自然映射 $i:L\longrightarrow\mathscr{U}(L)$ 是一嵌射（所以 L 可以和 $i(L)$ 認同）。

證明・這是系 A 的一個特例；取 $W=T^1(=L)$ 就可以了。

我們准許 L 具有無限維。在實用上，若 L 的一組基底是可數的就能符合我們的目的。

系C. 令 $(x_1,x_2,x_3,\cdots\cdots)$ 是 L 的任何有序基底。那麼，元素 $x_{i(1)}\cdots\cdots x_{i(m)}=\pi(x_{i(1)}\otimes\cdots\cdots\otimes x_{i(m)})$，$m\in\mathbf{Z}^+$，$i(1)\leq i(2)\leq\cdots\cdots\leq i(m)$，跟 1 一同成爲 $\mathscr{U}(L)$ 的一組基底

證明・令 W 是在 T^m 中由一切的 $x_{i(1)}\otimes\cdots\cdots\otimes x_{i(m)}$，$i(1)\leq\cdots\cdots$

$\leq i(m)$，生成的子空間。顯然 W 同構地映上 S^m，所以由系 A 知 $\pi(W)$是 U_{m-1} 在 U_m 中的一個補空間。

上面所建構的基底可簡稱是 $\mathscr{U}(L)$ 的一組 PBW 基底。

系 **D.** 令H是L的一個子代數，並且將H的一組有序基底擴張成L的一組有序基底 $(h_1, \cdots\cdots, x_1, \cdots\cdots)$。那麼由嵌型同態 $H \longrightarrow L \longrightarrow \mathscr{U}(L)$ 引出的同態 $\mathscr{U}(H) \longrightarrow \mathscr{U}(L)$ 也是嵌型同態，而且$\mathscr{U}(L)$是一個自由的 $\mathscr{U}(H)$ 一模，其自由基底是由一切的 $x_{i(1)}\cdots\cdots x_{i(m)}$，$i(1) \leq i(2) \leq \cdots\cdots \leq i(m)$及 1 一同組成。

證明 · 這些主張可由系C立即得證。

為了以後的應用，我們也寫下一個特別的事實。

系 **E.** 令 $char\, \mathbf{F} = 0$。記號如 (17.1)，合成 $S^m L \longrightarrow \tilde{S}^m L \longrightarrow U_m$ 將 $S^m L$ 同構地映上 U_{m-1} 在 U_m 中的一個補空間。

證明 · 在系A中取$W = \tilde{S}^m$

17.4. PBW 定理的證明

固定L的一組有序基底 $(x_\lambda; \lambda \in \Omega)$。這個選擇認同了$\mathfrak{S}$和以 z_λ($\lambda \in \Omega$) 為未知元的多項式代數。對每一指標的序列 $\sum = (\lambda_1, \cdots\cdots, \lambda_m)$ (m叫做$\sum$的長度)，令 $z_\Sigma = z_{\lambda_1} \cdots\cdots z_{\lambda_m} \in S^m$ 而且令 $x_\Sigma = x_{\lambda_1} \otimes \cdots\cdots x_{\lambda_m} \in T^m$。如果依$\Omega$的次序我們有 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots\cdots \leq \lambda_m$，我們就說$\sum$是遞增；我們特定$\phi$是遞增而且 $z_\phi = 1$。所以 $\{z_\Sigma | \sum 是遞增\}$ 是$\mathfrak{S}$的一組基底。在$\mathfrak{S} = \amalg S^m$ 中我們定義 $S_m = S^0 \oplus \cdots\cdots \oplus S^m$。在以下諸引理中，如果$\lambda \leq \mu \ \forall \mu \in \sum$，就記$\lambda \leq \sum$。

引理 A. 對於每一 $m \in \mathbf{Z}^+$，存在唯一的線性映射 $f_m: L \otimes S_m \longrightarrow \mathfrak{S}$滿足：

$$(A_m)\ f_m(x_\lambda \otimes z_\Sigma) = z_\lambda z_\Sigma,\ \lambda \leq \textstyle\sum,\ z_\Sigma \in S_m。$$

$$(B_m)\ f_m(x_\lambda \otimes z_\Sigma) - z_\lambda z_\Sigma \in S_k,\ k \leq m,\ z_\Sigma \in S_k。$$

$$(C_m)\ f_m(x_\lambda\otimes f_m(x_\mu\otimes z_T))=f_m(x_\mu\otimes f_m(x_\lambda\otimes z_T))+$$
$$f_m([x_\lambda x_\mu]\otimes z_T),\ z_T\in S_{m-1}\text{。}$$

不僅如此，f_m 在$L\otimes S_{m-1}$ 上的限制和 f_{m-1} 是一致的。

證明・一旦 (B_m) 證明了之後，(C_m) 的各項就都有意義。也注意 f_m 在$L\otimes S_{m-1}$ 上的限制自動地滿足$(A_{m-1}),(B_{m-1}),(C_{m-1})$，所以由所主張的唯一性我們知道這限制後的映射必與 f_{m-1} 是一致的。爲了證明 f_m 的存在性和唯一性，我們對m做歸納。對於$m=0$，只出現 $z_\Sigma=1$； 所以我們可以令 $f_0(x_\lambda\otimes 1)=z_\lambda$（並且線性地擴張至$L\otimes S_0$）。顯然，$f_0$ 滿足，$(A_0),(B_0)$ 及 (C_0) 而且 (A_0) 證明我們選擇的 f_0 是唯一可能的。

假定存在唯一 f_{m-1} 滿足 $(A_{m-1}),(B_{m-1}),(C_{m-1})$，我們想將 f_{m-1} 擴張至一映射 f_m。爲此之故。我們只定義 $f_m(x_\lambda\otimes z_\Sigma)$，其中$\Sigma$是長度爲$m$的遞增序列。

對於 $\lambda\leq\Sigma$，如果我們定義$f_m(x_\lambda\otimes z_\Sigma)=z_\lambda z_\Sigma$，則 (A_m) 成立。如果 $\lambda\not\leq\Sigma$，則Σ中的第一個指標 μ 必是嚴格地小於 λ，所以$\Sigma=(\mu,T)$，其中當然$\mu\leq T$而且T的長度是 $m-1$。由 (A_{m-1}), $z_\Sigma=z_\mu z_T=f_{m-1}(x_\mu\otimes z_T)$。因爲 $\mu\leq T$, $f_m(x_\mu\otimes z_T)=z_\mu z_T$ 已有定義，所以 (C_m) 的左端變成 $f_m(x_\lambda\otimes z_\Sigma)$。他方面，$(B_{m-1})$ 導致 $f_m(x_\lambda\otimes z_T)\equiv z_\lambda z_T\ (mod\ S_{m-1})$。這證明了 (C_m) 的右端已有定義：

$$z_\mu z_\lambda z_T+f_{m-1}(x_\mu\otimes y)+f_{m-1}([x_\lambda x_\mu]\otimes z_T),\ y\in S_{m-1}\text{。}$$

前面的註解證明我們能夠定義f_m 而且只有一個定義的方式。不僅如此，(A_m) 和 (B_m) 顯然是成立，又在$\mu<\lambda$, $\mu\leq T$ 的情形下 (C_m) 也是成立。但是 $[x_\mu,x_\lambda]=-[x_\lambda,x_\mu]$，所以對 $\lambda<\mu$, $\lambda\leq T$ 來說，(C_m) 也是成立。現在只要再考慮 $\lambda\not\leq T$ 而 $\mu\not\leq T$ 的情形。記$T=(\nu,\Psi)$，其中 $\nu\leq\Psi$, $\nu<\lambda$, $\nu<\mu$。爲了記號應用的方便起見，只要$x\in L$, $z\in S_m$ 我們就以 xz 代表 $f_m(x\otimes z)$。

歸納法假設保證 $x_\mu x_T = x_\mu(x_\nu z_\Psi) = x_\nu(x_\mu z_\Psi) + [x_\mu x_\nu], x_\Psi$，而且依 $(B_{m-2}) x_\nu z_\Psi = z_\mu z_\Psi + w (w \in S_{m-2})$。因爲 $\nu \leq \Psi$，$\nu < \mu$，所以 (C_m) 可以用在 $x_\lambda(x_\nu(z_\mu z_\Psi))$。由歸納法，$(C_m)$ 也可以用在 $x_\lambda(x_\nu w)$，因此可以用在 $x_\lambda(x_\nu(x_\mu z_\Psi))$。結果:

$$(*)\quad x_\lambda(x_\mu z_T) = x_\nu(x_\lambda(x_\mu z_\Psi)) + [x_\lambda x_\nu](x_\mu z_\Psi) + [x_\mu x_\nu](x_\lambda z_\Psi) + [x_\lambda[x_\mu x_\nu]] z_\Psi$$

記住，在這整個討論中，λ 和 μ 是可以互換的。如果在 (*) 中將 λ 和 μ 互換而且將所得的等式減一減，就得:

$$\begin{aligned} x_\lambda(x_\mu z_T) - x_\mu(x_\lambda z_T) &= x_\nu(x_\lambda(x_\mu z_\Psi)) - x_\nu(x_\mu(x_\lambda z_4)) \\ &+ [x_\lambda[x_\mu x_\nu]] z_\Psi - [x_\mu[x_\lambda x_\nu]] z_\Psi = x_\nu([x_\lambda x_\mu] z_\Psi) \\ &+ [x_\lambda[x_\mu x_\nu]] z_\Psi + [x_\mu[x_\nu x_\lambda]] z_\Psi = [x_\lambda x_\mu](x_\nu z_\Psi) \\ &+ ([x_\nu[x_\lambda x_\mu]] + [x_\lambda[x_\mu x_\nu]] + [x_\mu[x_\nu x_\lambda]]) z_\Psi \\ &= [x_\lambda x_\mu] z_T \text{ (利用 Jacobi 等式)} \end{aligned}$$

（**譯者按**：原書在第一個等式的右邊第二項顯然漏掉一個 x_ν）這樣就證明了 (C_m) 也同時完成此引理的證明。

引理 B. 存在一表現 $\rho: L \longrightarrow gl(\mathfrak{S})$ 滿足:

(a) $\rho(x_\lambda) z_\Sigma = z_\lambda z_\Sigma$，$\lambda \leq \Sigma$

(b) 如果 Σ 的長度是 m，則 $\rho(x_\lambda) z_\Sigma \equiv z_\lambda z_\Sigma (mod S_m)$。

證明: 引理 A 使我們能够定義一個線性映射 $f: L \otimes \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{S}$ 使得對任意 m，f 都會滿足 (A_m), (B_m) 及 (C_m)（因爲唯一性，f_m 限制 $L \otimes S_{m-1}$ 上就是 f_{m-1}）。換句話說，$\mathfrak{S}$ 變成是一個 L-模（條件 (C_m)），因而提供一個表現 ρ 它滿足 (a) 及 (b)（利用 (A_m), (B_m)）。

引理 C. 令 $t \in T_m \cap J$ （$J = Ker\pi$, $\pi: \mathscr{T} \longrightarrow \mathscr{U}$ 自然映射）。則 t 的 m 次齊次分量 t_m 落在 I（自然映射 $\mathscr{T} \longrightarrow \mathfrak{S}$ 的核）中。

證明: 將 t_m 寫成基底元素 $x_{\Sigma(i)} (1 \leq i \leq r)$ 的線性組合，其中

$\sum(i)$ 的長度是m。在引理B中的李同態 $\rho: L \longrightarrow gl(\mathfrak{S})$ 藉着$\mathscr{U}$的泛性可擴張成一代數同態（也叫做 ρ）$\mathscr{T} \longrightarrow End\,\mathfrak{S}$，而且 $J \subset Ker\rho$。所以 $\rho(t)=0$。（譯者按：原書將 0 印成 1 是錯誤的）但是依引理 $B, \rho(t)1$ 是一多項式其最高次項是 $z_{\Sigma(i)}(1 \leq i \leq r)$ 的適當線性組合。所以此組合在$\mathfrak{S}$中是 0 而且 $t_m \in I$ 正如所求。

PBW 定理的證明：令 $t \in T^m$, $\pi: \mathscr{T} \longrightarrow \mathscr{U}$是自然映射。我們必須證明由 $\pi(t) \in U_{m-1}$ 導致 $t \in I$。但是 $t \in T^m, \pi(t) \in U_{m-1}$ 一同導致 $\pi(t)=\pi(t')$，其中 $t' \in T_{m-1}$，因此 $t-t' \in J$。將引理C應用至張量 $t-t' \in T_m \cap J$上：因爲m次的齊次分量是 t，所以 $t \in I$。

17.5. 自由李代數

讀者可能對用生成元和關係來建構羣的方法有相當的認識。在第十八節裏我們將利用類似的方法造半單李代數。爲此之故，我們需要自由李代數的觀念。

令L是佈於$\mathbf{F}$上而且由一集合X生成的一個李代數。如果給以任何映射$\phi: X \longrightarrow M$, M爲一李代數，則存在唯一同態 $\psi: L \longrightarrow M$使得 $\psi|_X=\phi$ 我們就說L在X上是自由。讀者易證得這樣的代數L在同構下是唯一的。至於其存在性，我們考慮以X爲基底的向量空間V，然後造一張量代數 $\mathscr{T}(V)$（藉着括弧運算 $\mathscr{T}(V)$ 可以看成是一李代數），並且令L是 $\mathscr{T}(V)$ 中由X生成的子李代數。給以任何映射ϕ: $X \longrightarrow M$，把ϕ先擴張成一線性映射$V \longrightarrow M \subset \mathscr{U}(M)$，然後自然地擴張成一結合代數同態$\mathscr{T}(V) \longrightarrow \mathscr{U}(M)$，或一李代數同態（它限制在$L$上的映射正是我們所需的 $\psi: L \longrightarrow M$，蓋因$\psi$把生成元$X$映至$M$中）。

我們給一註解如下，如果L在一集合X上是自由的，則對任一向量空間V我們只要定義 $X \longrightarrow gl(V)$ 然後擴張成 $L \longrightarrow gl(V)$ 就會

在向量空間V上定義了一個L模結構。

最後，如L在X上是自由的，而且如果R是在L中由元素 f_j （j取盡某一指標集的全體元素），我們稱 L/R 是由生成元 x_i 及關係$f_j=0$生成的李代數，其中 x_i 等是X的元素在L/R中的像。

習　題

1. 試證當 $dimL<\infty$時，$\mathscr{U}(L)$ 沒有零因子。〔提示：試利用結合賦次代數$\mathscr{G}$和一多項式代數是同構的事實。〕

2. 令L是二維非可交換李代數（1.4),$[x,y]=x$ 。試直接證明$i:L\longrightarrow\mathscr{U}(L)$是一嵌射（即$J\cap L=0$）。

3. 如果$x\in L$，定義 $adx(y)=xy-yx$ （$y\in\mathscr{U}(L)$）則可將 adx 擴張成 $\mathscr{U}(L)$ 的一個自同態。如果 $dim<\infty$，試證 $\mathscr{U}(L)$ 的每一元素都落在一有限維子L模。〔如果 $x,x_1,\cdots\cdots,x_m\in L$，試證 $adx(x_1,\cdots\cdots x_m)=\sum_{i=1}^{m}x_1x_2\cdots\cdots adx(x_i)\cdots\cdots x_m$。〕

4. 如果L是一集合X上的一個自由李代數。試證$\mathscr{U}(L)$和一向量空間V上的張量代數是同構，其中V是以X爲其基底。

5. 試描述一集合$X=\{x\}$上的自由李代數。

6. 如何利用PBW定理建構自由李代數？

附　註

我們處理 PBW 定理的方式是依據 Bourbaki〔1〕。至於其他的處理方式可參考 Jacobson〔1〕。

18.　生成元與關係

現在我們能繼續研究佈於代數封體 $\mathbf{F}(char\,\mathbf{F}=0)$ 上的半單李代

數L。我們的目標是想以生成元和關係來介紹L，不過我們還要求這些生成元和關係只和根系相關，因此我們同時證明以Φ爲根系的半單李代數的存在性和唯一性。在這一節中，跟以往正好相反，我們准許李代數是無限維的。

18.1.　L所滿足的關係

令L半單李是代數，H是一CSA，Φ是相應的根系，$\Delta=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\}$是一固定基底。記住$<\alpha_i,\alpha_j>=\frac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)}=\alpha_i(h_j)$ $(h_j=h_{\alpha_j})$。固定一組標準生成元 $x_i\in L_{\alpha_i}$, $y_i\in L_{-\alpha_i}$，所以 $[x_iy_i]=h_i$。

命題　就以上的記號，L是由$\{x_i, y_i, h_i \mid 1\leq i\leq l\}$生成的，而且這些生成元至少滿足以下的關係:

(S1) $[h_ih_j]=0$　　$(1\leq i, j\leq l)$。

(S2) $[x_iy_i]=h_i, [x_i, y_j]=0$, $i\neq j$。

(S3) $[h_ix_j]=<\alpha_j,\alpha_i>x_j, [h_iy_j]=-<\alpha_j,\alpha_i>y_j$。

(S_{ij}^+) $(ad\, x_i)^{-<\alpha_j\alpha_i>+1}(x_j)=0$　　$(i\neq j)$。

(S_{ij}^-) $(ad\, y_i)^{-<\alpha_j\alpha_i>+1}(y_j)=0$　　$(i\neq j)$。

證明　由命題 14.2 得知L是由 x_i 和 y_i 等生成的。關係(S1)是顯然，(S2)也一樣。當$i\neq j$時，$\alpha_i-\alpha_j\notin\Phi$（引理 10.1）。由此事實看來（S3）是明顯的。現在考慮(S_{ij}^+)（(S_{ij}^-)經由對稱關係就可得到）。因爲$i\neq j$, $\alpha_i-\alpha_j$不是一個根，而且通 α_j 的 α_i-根鏈是由 $\alpha_j, \alpha_j+\alpha_i, \cdots\cdots, \alpha_j+q\alpha_i$ 組成，其中$-q=<\alpha_j,\alpha_i>$（參考(9.4)或命題 8.4(e)）。因爲 $ad\,x_i$ 把 x_j 連續地映至 $\alpha_j+\alpha_i, \alpha_j+2\alpha_i, \cdots\cdots$的根空間，所以$(S_{ij}^+)$成立。

注意，在命題中的關係裏所包含的常數只和根系相關。Serre 發現一件事實，那就是這些關係式形成了L的一組完整的定義關係（以

下定理 18.3)。就證明 Serre 定理的第一步來說，我們先檢驗只由 $(S1)$—$(S3)$ 定義的李代數（可能是無限維）。

由 $(S1)$—$(S3)$ 推論而得的結果

固定一個根系，其基底$\Delta=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_l\}$。縮寫 Cartan 整數 $<\alpha_i,\alpha_j>$爲c_{ij}。我們由 $3l$ 個生成元 $\{\hat{x}_i,\hat{y}_i,\hat{h}_i|1\leq i\leq l\}$ 上的自由李代數L開始(參考(17.4))。令$\hat{K}$是在L中由以下元素生成的理想: $[\hat{h}_i\hat{h}_j]$, $[\hat{x}_i\hat{y}_j]-\delta_{ij}h_i$, $[\hat{h}_i\hat{x}_j]-c_{ij}\hat{x}_j$, $[\hat{h}_i\hat{y}_j]+c_{ji}\hat{y}_j$。置 $L_0=\hat{L}/\hat{K}$, 而且令 x_i,y_i,h_i 分別爲生成元在 L_0 中的像。(一般, $dim L_0=\infty$。)

就 L_0 來說，其麻煩的地方是它太抽象，以致可能是無聊的。爲了更具體地研究 L_0，我們想造出它的一個適當的表現。以下的建構將在第六章中扮演相當重要的角色，所以讀者應該密切地注意這整個的討論。

如 (17.5) 中所說的，要造L的模是沒有任何困難的: 我們只要對每一個生成元指定一個線性變換就可以了。令V是以 $(v_1,v_2,\cdots\cdots;v_l)$ 爲基底的向量空間上的張量代數（=自由結合代數），不過忘掉V中的乘積。爲了避免累人的記號，我們將 $v_{i_1}\otimes\cdots\cdots\otimes v_{i_t}$ 縮寫成 $v_{i_1}\cdots\cdots v_{i_t}$。這些張量和 1 一同形成$V$佈於$\mathbf{F}$上的基底。其次，定義$V$的自同態如下:

$$\begin{cases}\hat{h}_j\ 1=0\\ \hat{h}_jv_{i_1}\cdots\cdots v_{i_t}=-(c_{i_1j}+\cdots\cdots+c_{i_tj})v_{i_1}\cdots\cdots v_{i_t}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\hat{y}_j\cdot 1=v_j\\ \hat{y}_j\cdot v_{i_1}\cdots\cdots v_{i_t}=v_jv_{i_1}\cdots\cdots v_{i_t}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\hat{x}_j\cdot 1=0=x_j\cdot v_i\\ \hat{x}_j\cdot v_{i_1}\cdots v_{i_t}=v_{i_1}(\hat{x}_j\cdot v_{i_2}\cdots v_{i_t})-\delta_{i_1j}(c_{i_2j}+\cdots+c_{i_tj})\,v_{i_2}\cdots v_{i_t}\end{cases}$$

於是這作用有一唯一的擴張因而得一表現 $\hat{\phi}:\hat{L}\longrightarrow gl(V)$

命題: 令 $\hat{K}_0 = Ker\hat{\phi}$。則 $\hat{K} \subset \hat{K}_0$，即 $\hat{\phi}$ 引出一同態 $L_0 \longrightarrow gl(V)$，因此使 V 成爲一個 L_0-模。

證明: 首先注意 $\hat{h}_j$ 在 V 上的作用是對角的（相對於選出的 V 的基底），所以 $\hat{\phi}(h_i)$ 和 $\hat{\phi}(\hat{h}_j)$ 是互相交換的，即 $[\hat{h}_i\hat{h}_j] \in \hat{K}_0$。他方面，$\hat{\phi}(\hat{y}_j)$ 只是左乘以 v_j。（只有 x_j 的作用是複雜的事。）

在公式中置 $j = i_1$，我們得: $\hat{x}_i\hat{y}_j v_{i_2} \cdots\cdots v_{i_t} - \hat{y}_j \cdot \hat{x}_i \cdot v_{i_2} \cdots\cdots v_{it} = -\delta_{ji}(c_{i_2 i} + \cdots\cdots + c_{i_t i}) v_{i_2} \cdots\cdots v_{i_t} = \delta_{ji}\hat{h}_i \cdot v_{i_2} \cdots\cdots v_{i_t} (\hat{x}_i\hat{y} - \hat{y}_j\hat{x}_i).1 = 0 = \delta_{ji}\hat{h}_i \cdot 1$。所以 $[\hat{x}_i\hat{y}_j] - \delta_{ji} \in \hat{K}_0$。

其次，$[\hat{h}_i\hat{y}_j - \hat{y}_j\hat{h}_i] \cdot 1 = \hat{h}_i \cdot v_j = -c_{ji}v_j = -c_{ji}\hat{y}_j \cdot 1$。同理，$(\hat{h}_i\hat{y}_j - \hat{y}_j\hat{h}_i) \cdot v_{i_1} \cdots\cdots v_{i_t} = \hat{h}_i \cdot v_j v_{i_1} \cdots\cdots v_{it} = \hat{h}_i \cdot v_j v_{i_1} \cdots\cdots v_{i_t} + (c_{i_1 i} + \cdots\cdots + c_{i_t i}) v_j v_{i_1} \cdots\cdots v_{i_t} = -c_{ji}\hat{y}_j \cdot v_{i_1} \cdots\cdots v_{i_t}$。所以 $[\hat{h}_i\hat{y}_j] + c_{ji}\hat{y} \in K_0$。

對於餘下的步驟中，我們做一基本的觀察:

(*)　$$\hat{h}_i \cdot \hat{x}_j \cdot v_{i_1} \cdots\cdots v_{i_t} = -(c_{i_1 i} + \cdots + c_{i_t i} - c_{ji})\hat{x}_j \cdot v_{i_1} \cdots v_{i_t}。$$

上式 (*) 可用數學歸納法證明。爲 $t = 0$ 時，由規定，$v_{i_1} \cdots\cdots v_{i_t} = 1$。所以 (*) 的左右兩端都是 0。歸納法假設表示 $\hat{x}_j \cdot v_{i_1} \cdots\cdots v_{i_t}$ 是 $\hat{h}_i$ 的一個固有向量，其固有值是 $-(c_{i_2 i} + \cdots\cdots + c_{i_t i} - c_{ji})$。在此固有向量的左端乘以 v_{i_1} 顯然會產生 $\hat{h}_i$ 的另一個固有向量其固有值是 $(c_{i_1 i} + \cdots\cdots + c_{i_t i} - c_{ji})$。由這些註解以及定義就容易證得 (*)。

利用 (*) 我們可以計算: $(\hat{h}_i\hat{x}_j - \hat{x}_j\hat{h}_i) \cdot 1 = 0$, $(\hat{h}_i\hat{x}_j - \hat{x}_j\hat{h}_i) v_{i_1} \cdots \cdots v_{i_t} = (-(c_{i_1 i} + \cdots\cdots + c_{i_t i} - c_{ii}) + (c_{i_1 i} + \cdots\cdots + c_{i_t i}))\ \hat{x}_j v_{i_1} \cdots\cdots v_{i_t} = c_{ji}\hat{x}_j \cdot v_{i_1} \cdots\cdots v_{i_t}$　所以 $[\hat{h}_i\hat{x}_j] - c_{ji}\hat{x}_j \in \hat{K}_0$ 最後，$\hat{K} \subset \hat{K}_0$

定理: 給以一根系 Φ 其基底是 $\{\alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_l\}$，令 L_0 是由生成元 $\{x_i, y_i, h_i \mid 1 \leq i \leq l\}$ 和關係 $(S1)$—$(S3)$ 生成的李代數。那麼 $\{h_i\}_{i=1}^{l}$ 是 L_0 的一個 Abel 子代數 H 的基底而且 $L_0 = Y + H + X$（子空間的直和），其中 Y, X 分別是由 $\{y_i\}_{i=1}^{l}$, $\{x_i\}_{i=1}^{l}$ 生成的子代數。

證明: 證明分成幾個步驟。利用以上所造的表現 ϕ: $L_0 \longrightarrow$

$gl(V)$: 如果 x 是 $\hat{x}\in L$ 在 L_0 中的像，則 $\phi(x)=\hat{\phi}(\hat{x})$。

(1) $\sum\mathbf{F}\hat{h}_j\cap Ker\hat{\phi}=0$。如果 $\hat{h}=\sum_{j=1}^{l}a_j\hat{h}_j$，而且 $\hat{\phi}(\hat{h})=0$，則 $\hat{\phi}(h)$ 的固有值 $-\sum_j a_jc_{ij}(1\leq i\leq l)$ 都是 0。但是Φ的 Cartan 矩陣是非退化的，所以這使得一切的 $a_j=0$，即 $\hat{h}=0$。

(2) 自然映射 $\hat{L}\longrightarrow L_0$ 將 $\sum\mathbf{F}\hat{h}_j$ 以同構方式映上 $\sum\mathbf{F}h_j$。這由 (1) 立得。

(3) $\hat{L}$ 的子空間 $\sum\mathbf{F}\hat{x}_j+\sum\mathbf{F}\hat{y}_j+\sum\mathbf{F}\hat{h}_j$ 以同構的方式映入 L_0。固定 i。關係 $(S1)$—$(S3)$ 包括：$[x_iy_i]=h_i, [h_ix_i]=2x_i, [h_iy_i]=-2y_i$；所以 $\mathbf{F}x_i+\mathbf{F}y_i+\mathbf{F}h_i$ 是 $sl(2,\mathbf{F})$ 的一個同態像。但是後者是一個單代數，而且 $h_i\neq 0$ （步驟 (2)），所以 $\mathbf{F}x_i+\mathbf{F}y_i+\mathbf{F}h_i$ 和 $sl(2,\mathbf{F})$ 必是同構。現在集合 $\{x_j, y_j, h_j | 1\leq j\leq l\}$ 是線性獨立，蓋因它的元素是非零而且滿足 $(S1)$—$(S3)$ (參考 $ad\,h_j$ 的固有值)。這就證明了 (3)。

(4) $H=\sum\mathbf{F}h_j$ 是 L_0 的一個 l 維可交換子代數。這由 (2) 及 $(S1)$ 即得。

(5) 如果 $[x_{i_1}\cdots\cdots x_{i_t}]$ 表示 $[x_{i_1}[x_{i_2}\cdots\cdots[x_{i_{t-1}}x_{i_t}]\cdots\cdots]]$，則 $[h_j[x_{i_1}\cdots\cdots x_{i_t}]]=(c_{i_1j}+\cdots\cdots+c_{i_tj})[x_{i_1}\cdots\cdots x_{i_t}]$，同理，我們可以 y_i 代替 x_i，$-c_{ij}$ 代替 c_{ij}。當 $t=1$ 時，這正好是 $(S3)$。一般情形可利用數學歸納法及 Jacobi 等式而得到。

(6) 如果 $t\geq 2$，則 $[y_j[x_{i_1}\cdots\cdots x_{i_t}]]\in X$，同時，對於$Y$也是一樣。由關係$(S2)$，$[y_jx_i]=-\delta_{ij}h_i$，因而 $t=2$ 的情形可由 Jacobi 等式及 $(S3)$ 立得。利用數學歸納法就可以完成證明。

(7) $Y+H+X$是 L_0 的一個子代數，因此與 L_0 是一致的。由 (4), (5), (6) 知 $Y+H+X$ 是 L_0 的一個子代數。但是$Y+H+X$包含 L_0 的一個生成集，所以它與 L_0 是一致。

(8) $L_0=Y+H+X$是一直和。事實上，(5) 已說明了 L_0 是如解成何地分 adH 的固有子空間；所以$L_0=Y+H+X$是一直和（參考(1),(2)）。

如果我們用「權」(利用第 20 節的語言) 來描述分解 $L_0=Y+H+X$，那將會是很方便。對 $\lambda\in H^*$，令$(L_0)_\lambda=\{t\in L_0\,|\,[ht]=\lambda(h)t\ \forall h\in H\}$。前一定理的證明證明了$H=(L_a)_0$。不僅如此，我們還知道使得 $(L_0)_\lambda\neq 0$ 的非零 λ 正是那些形如 $\lambda=\sum_{i=1}^{l}k_i\alpha_i$ $(k_i\in Z)$ 的權，其中一切的 $k_i\geq 0$（在此情形下，記 $\lambda\succ 0$）或一切的 $k_i\leq 0$（記 $\lambda\prec 0$）。於是$X=\sum_{\lambda\succ 0}(L_0)_\lambda$ 而且$Y=\sum_{\lambda\prec 0}(L_0)_\lambda$。

18.3. Serre 定理

在 (18.2) 中我們研究了僅由 $(S1)$—$(S3)$ 決定的李代數 L_0 的結構。現在我們想知道如果加上(18.1)的「有限」條件(S_{ij}^+),(S_{ij}^-)之後會有怎樣的結果。置 $x_{ij}=(ad\,x_i)^{-c_{ji}+1}(x_j)$, $y_{ij}=(ad\,y_i)^{-c_{ji}+1}(y_j)$ $(i\neq j)$。（這些是 L_0 的元素。）

引理: 在 (18.2) 的李代數 L_0 中，對$1\leq i\neq j\leq t$及$1\leq k\leq l$來說，我們有 $ad\,x_k(y_{ij})=0$。

證明: 第一種情形: $k\neq i$。則 $[x_ky_i]=0$（由 $(S2)$），所以 $ad\,x_k$和$ad\,y_i$可以交換。因此，$ad\,x_k(y_{ij})=(ad\,y_i)^{-c_{ji}+1}ad\,x_k(y_j)$。如果 $k=j$，這就是 $(ad\,y_i)^{-c_{ji}+1}(h_j)$。但是由 $(S3)$, $ad\,y_i(h_j)=c_{ij}y_i$。如果這不是0，則 c_{ji} 不是 0（因而是負的，理由是 $i\neq j$），所以$-c_{ji}+1\geq 2$。因此 $(ad\,y_i)^{-c_{ji}+1}(h_j)=0$。如果 $k\neq j$，則 $[x_ky_j]=0$ $(S2)$，所以相同的主張也是成立。

第二種情形: $k=i$。回憶定理 18.2 的證明，$S=\mathbf{F}x_i+\mathbf{F}y_i+\mathbf{F}h_i$ 是 L_0 的一個子代數而且它與 $sl(2,\mathbf{F})$ 是同構。因此我們能够提到很多關於S在 L_0 上的正規作用。即使 L_0（一般）是無限

維，第七節中所用的一些推論在現在的情況下還是有效的。特別，因爲 $j\neq i$，$[x_iy_j]=0$，所以 y_i 是 S 的一個極大向量其「權」是 $m=-c_{ji}$（因爲 $[h_iy_j]=-c_{ji}y_j$）。對 t 做歸納能證明 $ad\,x_i(ad\,y_i)^t(y_j)=t(m-t+1)(ad\,y_i)^{t-1}(y_j)$。所以當 $t=-c_{ji}+1$ 時右端是 0。

在敍述 Serre 定理之前我們先提一個有用的建構。設 V 是一無限維向量空間而 x 是 V 的一個自同態。如果 V 的每一元素，在 x 的一個相當大的冪的作用下會變成 0 則稱 x 是局部冪零。在此情形下，x 在 V 的任一有限維子空間 W 上的作用是冪零的，所以 $exp(x|_W)$ 是有意義的。顯然，$exp(x|_W)$ 與 $exp(x|_{W'})$ 在 $W\cap W'$ 上是一致的，所以我們能把這些映射縫合起來而得到 V 的一個自同構「$expx$」。

定理 (Serre)：固定一個根系 Φ 而且令 $\Delta=\{\alpha_1,\cdots\cdots,\alpha_l\}$ 爲其基底。令 L 是由 $3l$ 個元素 $\{x_i,y_i,h_i|1\leq i\leq l\}$ 依（18.1）中所列的關係 $(S1),(S2),(S3),(S_{ij}^+),(S_{ij}^-)$ 生成的李代數。則 L 是一（有限維）半單李代數，其 CSA 是由 h_i 以及相應的根系生成的。

證明：我們分幾個步驟進行。由定義，$L=L_0/K,L_0$ 如（18.2）而 K 是由一切 $x_{ij},y_{ij}(i\neq j)$ 生成的理想。爲避免記號的麻煩，我們先考慮 L_0 在 X,Y 中令 I，J，分別是由一切 x_{ij},y_{ij} 生成的理想。（所以 K 包含 I，J。）

(1) I 及 J 是 L_0 的理想。只要考慮 J 就足够了（因爲關於 I 的討論也是類似的）。一方面，y_{ij} 是 $adh_k(1\leq k\leq l)$ 的固有向量而以 $c_{jk}+(c_{ji}-1)c_{ik}$ 爲其固有值。因爲 $adh_k(Y)\subset Y$，由 Jacobi 等式得 $adh_k(J)\subset J$。他方面，由上面的引理知 $adx_k(J)\subset J$。顯然，adx_k 將 Y 映入 $Y+H$（參考 18.2）；將這個和 Jacobi 等式以及 $adh_k(J)\subset J$ 的事實組合起來我們得 $adx_k(J)\subset J$。最後再利用 Jacobi 等式得 $L_0(J)\subset J$（因爲 L_0 是由 x_k,y_k 生成的）。

(2) $K=I+J$ 依定義 $I+J\subset K$。但 $I+J$ 是在 L_0 中包含一切 x_{ij}, y_{ij} 的一個理想，而且 K 是這種理想的最小一個，所以 $K=I+J$。

(3) $L=N^-+H+N$（子空間的直和）， 其中 $N^-=Y/J$, $N=X/I$，而 H 認同於它在自然映射 $L_0\longrightarrow L$ 下的像。利用 (2) 及直和分解 $L_0=Y+H+X$（定理 18.2）卽得證。

(4) $\sum\mathbf{F}x_i+\sum\mathbf{F}h_i+\sum\mathbf{F}y_i$ 以同構方式映入 L。因爲 H 是以同構方式映入 L（由 (3)），所以這正和定理 18.2 的證明中的第三步驟是一樣。因此我們可以將 x_i, x_i, h_i 看成是 L 的元素（而且這些元素生成 L）。

(5) 如果 $\lambda\in H^*$，令 $L_\lambda=\{x\in L\,|\,[hx]=\lambda(h)x\ \ \forall h\in H\}$。則 $H=L_0, N=\sum\limits_{\lambda\succ 0}L_\lambda, N^-=\sum\limits_{\alpha\prec 0}L_\lambda$（參考 (18.2) 的註解），而且每個 L_λ 是有限維。由 (3),(4) 我們知此敍述是很正確。

(6) 對於 $1\leq i\leq l$, $ad\,x_i$ 和 $ad\,y_i$ 是 L 的局部冪零自同態。（由對稱性）只要考慮 $ad\,x_i$, i 固定， 就足够了。 令 $M=\{x\in L\,|$ 存在某一 $n\in\mathbf{N}$ 使得 $(ad\,x_i)^n(x)=0\}$。如果 $x, y\in M$ 卽 $(ad\,x_i)^r(x)=0$ 和 $(ad\,x_i)^s(y)=0$，則 $(ad\,x_i)^{r+s}([xy])=0$（參考引理 15.1)。所以 M 確實是 L 的一個子代數。但是一切的 $x_k\in M$（由關係 (S_{ij}^+)）以及一切的 $y_k\in M$（由 $(S2),(S3)$）。這些元素生成 L，所以 $M=L$。

(7) $\tau_i=exp(ad\,x_i)exp(ad-y_i)exp(ad\,x_i)$ $(1\leq i\leq l)$ 是 L 的一個自同構。這可由 (6) 及定理前的註解得到。

(8) 如果 $\lambda, \mu\in H^*$ 而且 $\sigma\lambda=\mu$（$\sigma\in\mathscr{W}$, Φ 的 Weyl 羣），則 $dimL_\lambda=chinL_\mu$。因爲 $\mathscr{W}$ 是由單鏡射生成的（定理10.3(d)），所以只要考慮 $\sigma=\sigma_{\alpha_i}$ 的情形就好了。在步驟(7)所造的自同構 τ_i 和通常的指數乘積在有限維空間 $L_\lambda+L_\mu$ 上是一致的，因而我們結論（如

(7.2) 的最後一部分) τ_i 調換 L_λ, L_μ。特別，$dimL_\lambda = dimL_\mu$。

(9) 對於 $1 \leq i \leq l$, $dimL_{\alpha_i} = 1$，然而對 $k \neq 0, 1, -1$, $L_{k\alpha_i} = 0$。對於 L_0 來說這是顯然的，由(4)，因此對於 L 來說也是顯然的。

(10) 如果 $\alpha \in \Phi$，則 $dimL_\alpha = 1$，然而對於 $k \neq 0, 1, -1$，則 $L_{k\alpha} = 0$。每一根在 $\mathscr{W}$ 的作用下都與一單根共軛（定理 10.3(c)），所以這可由 (8),(9) 得到。

(11) 如果 $L_\lambda \neq 0$，則 $\lambda \in \Phi$ 或者 $\lambda = 0$。不然的話，λ 是單根的一個整數組合，其係數有相同的符號（不全爲 0），由 (10) 知 λ 不是任何根的倍數。習題 10.10 證明了它的某一共軛 $\sigma\lambda$ 有一大於 0 的係數同時也有一小於 0 的係數。這是說 $L_{\sigma\lambda} = 0$（參考 (5)）因而與 (8) 的結論不合。

(12) $dimL = l + Card\Phi < \infty$，由於 (5) 我們知道這可由(10)，(11) 得到。

(13) L 是半單的。令 A 是 L 的一個可交換理想，我們必須證明 $A = 0$。因爲 $adH(A) \subset A$, $A = (A \cap H) + \sum_{\alpha \in \Phi}(A \cap L_\alpha)$（因爲 $L = H + \sum_{\alpha \in \Phi} L_\alpha$）。如果 $L_\alpha \subset A$，則 $[L_{-\alpha}L_\alpha] \subset A$，因此 $L_{-\alpha} \subset A$ 而且 A 包含單代數 $sl(2, \mathbf{F})$ 的一個非零同態像（參考 (4)）。這是荒謬的，所以 $A = A \cap H \subset H$，因此 $[L_\alpha A] = 0$ $(\alpha \in \Phi)$ 而且 $A \subset \bigcap_{\alpha \in \Phi} Ker\alpha = 0$ $(\alpha_i, 1 \leq i \leq l$ 生成 $H^*)$。

(14) H 是 L 的一個 CSA, Φ 是一個根系。H 是可交換的（因而是冪零的）而且是自身正規化的（因爲 $L = H + \sum_{\alpha \in \Phi} L_\alpha$ 是直和分解），即 H 是一 CSA。於是 Φ 顯然是相應根集。

18.4. 應用：存在與唯一定理

一分耕耘，一分收穫，我們的努力終於獲得回報。

定理：(a) 令Φ是一根系。則存在一半單李代數以Φ爲根系。

(b) 令L, L'是半單李代數，H, H'分別是他們的CSA，Φ, Φ'分別是他們的根系。令$\Phi \longrightarrow \Phi'$是一已知的同構，把已知基底$\Delta$送至一基底$\Delta'$，而以$\pi: H \longrightarrow H'$表示結合的同構（如(14.2)）。對每一$\alpha \in \Delta$ ($\alpha' \in \Delta'$) 取任意非零$x_\alpha \in L_\alpha$ ($x'_{\alpha'} \in L'_{\alpha'}$)。則存在唯一的同構$\pi: L \longrightarrow L'$它是$\pi: H \longrightarrow H'$的一個擴張。而且把$x_\alpha$送至$x'_{\alpha'} (\alpha \in \Delta)$。

證明：(a) 這可由定理 18.3 直接得到。(b) 對$\alpha \in \Delta$，$\alpha' \in \Delta'$選取（唯一地）$y_\alpha, y'_{\alpha'}$滿足$[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$，$[x'_{\alpha'}, y'_{\alpha'}] = h'_{\alpha'} = \pi(h_\alpha)$。因爲$x'_{\alpha'}, y'_{\alpha'}, h'_{\alpha'} (\alpha' \in \Delta')$滿足定理 18.3 的關係，而這生成$L'$，所以有唯一的同態$\pi: L \longrightarrow L'$把$x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha$ ($\alpha \in \Delta$)（各別地）送至$x'_{\alpha'}, y'_{\alpha'}, h'_{\alpha'}$。$\pi$是已知同構$H \longrightarrow H'$的一個擴張是顯然的。不僅如此，相同的討論也得到一個同態$\pi': L' \longrightarrow L$而且合成$\pi\pi'$及$\pi'\pi$在$L$及$L'$的生成元上分別是么射，所以$\pi$是一同構。

習　題

1. 利用L_0在V上的表現（命題 18.2），試證在定理 18.2 中所描述的代數X, Y，分別是集合$\{x_i | 1 \leq i \leq l\}$及$\{y_i | 1 \leq i \leq l\}$上的自由代數。

2. 當$rank\Phi = 1$時，關係$(S_{ij}^+), (S_{ij}^-)$是空的，所以$L_0 = L \cong sl(2, \mathbf{F})$。適當地修正在(18.2)中的$V$的基底，試證$V$與習題 7.7 中的模$Z(0)$是同構的。

3. 試證在 (18.3) 中L_0的理想K包含於L_0的任何理想，其補維是有限的（即L是L_0的最大有限維商代數）。

4. 試證 Dynkin 圖示的每一包含（例如$E_6 \subset E_7 \subset E_8$）在對應

半單李代數引出自然的包含。

〔附 註〕

實質上，定理 18.2 的證明是分別地由 Chevalley 與 Harish-Chandra (參考 Harish-Chandra〔1〕) 所提供，再經 Jacobson (參考 Jacobsrn〔1〕) 加以簡化。Serre 定理及其在存在與唯一定理上的運用可在 Serre〔2〕上找到。也可參考 Varada rajan〔1〕, §5.5

19. 單代數

如第十八節，F是一代數封閉體其特徵數是0。在這一節中我們收集一些有關佈於F上的單李代數的資料（很多已在習題中指出）。依照分類定理，存在一個（就同構而言）而且僅一個單李代數其根系是 $A_l(l\geq1), B_l(l\geq2), C_l(l\geq3), D_l(l\geq4), E_6, E_7, E_8, F_4, G_2$。我們將對古典型 $A-D$ 以及 G_2 做更爲完整的描述。但對其他的例外代數，其必備知識牽涉到 Jardan 代數等等將使我們離題太遠（參考以下的註解），所以略去不談。

19.1 半單性的判斷準則

在理論上（定理 5.1）我們可藉 Killing 形式的計算來檢定一已知李代數是否是半單？在實用上，我們有一個相當簡單的方法。首先，我們下一個定義（參考習題 6.5）。給定一李代數 $L\neq0$。如果 $Rad L=Z(L)$ 時稱 L 是縮減的。有兩種極端的情形：L 是可交換的及 L 是半單的。$gl(V)$ 是一中庸的情作。現在假定 L 是縮減而非可交換的，所以 $L'=L/Z(L)$ 是半單的。於是 $ad L\cong ad L'$ 在 L 上的表現是完全可約的 (6.3)。記 $L=M\otimes Z(L)$，M 是一理想。特別，

$[L,L]=[M,M]\subseteq M$。但是在自然同態下 $[LL]$ 映上 L'，所以 $L=[LL]\oplus Z(L)$。這些說明導致以下命題的第一個主張。

命題: (a) 令 L 是縮減的。則 $L=[LL]\oplus Z(L)$，而且 $[LL]$ 或者是 0 或者是半單的。

(b) 令 $L\subset gl(V)$ (V 是有限維) 是一非零李代數。如果 L 在 V 上的作用是既約的，則 L 是縮減的，又 $dim Z(L)\leq 1$。如果更進一步有 $L\subset sl(V)$，則 L 是半單的。

證明: 我們必須證明 (b)。令 $S=Rad L$。依 Lie 定理，S 在 V 中有一共同固有向量，即有一 $v\in V$ 使得 $s.v=\lambda(s)v$ ($s\in S$)。如果 $x\in L$，則 $[sx]\in S$ 導致 (*) $s.(x\cdot v)=\lambda(s)x\cdot v+\lambda([sx])v$。因爲 L 在 V 上的作用是既約的，所以 V 是由 $L\cdot v$ 生成的。所以由 (*) 得知 S 所有的元素 s 的矩陣 (關於適當的基底) 是呈三角形，以 $\lambda(s)$ 爲僅有的對角成分。然而，交換子 $[SL]\subset S$ 的跡是 0，所以這個條件逼使 λ 在 $[SL]$ 上的值成爲 0。回顧 (*)，我們現在可結論 $s\in S$ 在 V 上的作用是對角的正如純量 $\lambda(s)$ 一樣。特別，$S=Z(L)$ (所以 L 是縮減的) 而且 $dim S\leq 1$。最後，令 $L\subset sl(V)$。因爲 $sl(V)$ 除了 0 以外不包含任何純量 ($char\mathbf{F}=0$)，所以 $S=0$ 而且 L 是半單。

19.2. 古典代數

在 (1.2) 中我們介紹過古典代數。爲了避免重複起見，我們只考慮 $A_l(l\geq 1), B_l(l\geq 2), C_l(l\geq 3), D_l(l\geq 4)$ (參考習 1.10 以及第十一節中的分類)。因爲 $gl(V)=sl(V)+$ (純量)，又因爲 $gl(V)$ 在 V 上的作用是既約的 (它甚至是遞移的)，所以 $sl(V)$ 在 V 上的作用也顯然是既約的。這是應用命題 19.1 的判斷準則證明 B_l, C_l, D_l 的半單性的一個典型。(在 (1.2) 中我們已觀察到這些代數

是由一些跡為0的自同態組成的，所以需要證明的只是既約性而已。）

注意，V 的任何子空間如果在 $gl(V)$ 的子代數 L 的作用下保持不變則在1及 L 生成的結合代數（包含於 $End(V)$）的作用下保持不變。所以為了證明 B_l, C_l, D_l 的自然表現是既約的，我們只要證明 V 所有的自同態都可由1及 L 的元素經由加法，純量乘法及通常乘法而得就行了。由1可得一切的純量。由對角形矩陣（如(1.2)所列）我們能得到一切可能的對角矩陣。接着對於種種不同的基底元素（如 $e_{ij}-e_{ji}, i\neq j$）乘以適當的 $diag(0, \cdots\cdots, 1, \cdots\cdots, 0)$ （1在第 i 個位置）就得到一切的 e_{ij}，讀者能很快地證明這一點。

前面的討論證明了古典代數都是半單的。顯然，在每一種情形下由對角矩陣（列在（1.2）中）生成的 l 維子代數 H 是環面的而且 $C_L(H)=H$，因此是一極大環面子代數（$=CSA$）。在（1.2）中所描述的其餘基底元素，是根向量，所以很容易找到單根，由此就可以證明 L 正是所指定的各型單代數。

另有一種探討古典代數的方法，請讀者參考習題。

19.3. G_2 型代數

在第六章將看到 G_2 型的單代數有一（信實的）既約表現，它是以某些 7×7 矩陣寫出，而且沒有次數比7小的表現。結果發現矩陣是落在 $L_0=\mathrm{o}(7, \mathbf{F}), B_3$ 型單代數中。因為 $dimL_0=21$，然而 $dim\ G_2=14$，在事後我們發現將 G_2 看成是 L_0 的子代數 L 是不太難的。

如（1.2），L 有一組標準基底，可用矩陣 $e_{rs}(1\leq r, s\leq 7)$ 表示。在以下的討論中為了方便我們預定指標 j, j, k 給1，2，3。記住 L_0 有一 $CSA\ H_0$ 以（d_1, d_2, d_3）為基底，$d_i=e_{i+1i+1}-e_{i+4i+4}$。

子代數L的CSA的候選者將是$H=\{\sum a_i d_i \mid \sum a_i=0\}$。當然，$dimH=2$。

對應 G_2 的六個長根，它們自身形成 A_2 型的根系（習題12.4），我們在 L_0 中選某些關於 H_0 的根向量 $g_{i,-j}(i\neq j)$ 如下:

$$g_{1,-2}=g^t_{2,-1}=e_{23}-e_{65}.$$

$$g_{1,-3}=g^t_{3,-1}=e_{24}-e_{75}.$$

$$g_{2,-3}=g^t_{3,-2}=e_{34}-e_{76}.$$

至於L關於H的短根，我們取 $g_{\pm i}(i=1,2,3)$:

$$g_1=g^t_{-1}=\sqrt{2}(e_{12}-e_{51})-(e_{37}-e_{46})$$

$$g_2=-g^t_{-2}=\sqrt{2}(e_{13}-e_{61})+(e_{27}-e_{45})$$

$$g_3=-g^t=\sqrt{2}(e_{14}-e_{71})-(e_{26}-e_{35})$$

注意，以上所列的十二個根中，每一根都是 adH 的共同固有向量，而且沒有一個能與H所有的元素交換。現在我們能夠定義L是由H和此十二個向量生成的。以下的等式證明L在括弧運算下是封閉的。讀者能够在不花費太多的夫下而證明他們（就轉置關係之便可將他們歸結到幾個情形去討論）。

(1) $$[g_{i,-j},g_{k,-l}]=\delta_{jk}g_{i,-i}\delta_{il}g_{k,-j}$$

(2) $$[g_i,g_{-i}]=3d_i-(d_1+d_2+d_3)$$

(3) $$\left.\begin{aligned}&[g_i,g_{-l}]=-\delta_{ik}g_j\\&[g_{i,-j},g_{-k}]=\delta_{jk}g_{-l}\end{aligned}\right\}$$

(4) $$[g_i,g_{-j}]=3g_{j,-i}\qquad (i\neq j)$$

(5) $$\left.\begin{aligned}&[g_i,g_j]=\pm 2g_{-k}\\&[g_{-i},g_{-j}]=\pm 2g_k\end{aligned}\right\}\qquad (i,j,k\text{ 相異})$$

(5) 式中的符號可從以下等式看出:

$$[g_1,g_2]=2g_{-3},$$

$$[g_1,g_3]=-2g_{-2},$$

$[g_2, g_3]=2g_{-1}$

（這些等式都牽涉到轉置矩陣）。

依前面所述，L 是一個 14 維李代數，H 是 L 的一個 CSA $(dim H=2)$，而且 L 是由跡爲 0 的矩陣所組成。如果 L 是半單則由分類顯然可看出 G_2 是僅有可能的根系。所以由命題 19.1 我們只須證明L在 $V=\mathbf{F}^7$ 上的作用是既約的就可以了。令V的自然有序基底的次序是 $(v_0, v_1, v_2, v_3, v_{-1}, v_{-2}, v_{-3})$。矩陣 $diag(0,1,2,-3,-1,-2,3)$ 屬於H而有相異的固有值，所以如果$W\neq 0$是V中的L-不變子空間，則W 必至少包含一個自然基底向量。依次地，我們觀察到 $g_{\pm i}$ 將 v_0 送至 $v_{\mp i}$ 的一個倍數，而且將 $v_{\pm j}$ 送至 v_k 的一個倍數（i，j，k 相異），然而 $g_{i,-j}\cdot v_j=v_i, g_{i,-j}\cdot v_{-i}=-v_{-j}$。這些等式使得$W$包含一切基底向量，因此$W=V$

將 G_2 型單代數看成 8 維非結合代數$\mathscr{C}$（Cayley 或八元數代數）的導子代數 Der$\mathscr{C}$（參考 (1.3)）也是很有意思的。首先，我們必須描述$\mathscr{C}$。令 (e_1, e_2, e_3) 是 $\mathbf{F}^3$ 的通常正交基底（在通常的內積 $v\cdot w$）。$\mathbf{F}^3$ 也有一向量積（或叉積）$v\times w=-(w\times v)$ 滿足規則：$e_i\times e_i=0\ (i=1,2,3)$, $e_1\times e_2=e_3, e_2\times e_3=e_1, e_3\times e_1=e_2$。看成是向量空間，則$\mathscr{C}$是兩個 $\mathbf{F}^3$ 與兩個$\mathbf{F}$的和。然而爲了方便，我們將$\mathscr{C}$的元素記爲2×2矩陣$\begin{pmatrix} a & v \\ w & b\end{pmatrix}$ 其中 a，$b\in\mathbf{F}$，v，$w\in\mathbf{F}^3$ 對於純量乘法與加法如往常矩陣的做法一樣。然而在$\mathscr{C}$中的乘法規則是較複雜：

$$\begin{pmatrix} a & v \\ w & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & v' \\ w' & b'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} aa'-v\cdot w' & av'+b'v+w\times w' \\ a'w+bw'+v\times v' & bb'-w\cdot v'\end{pmatrix}$$

因爲$\mathbf{F}$中的乘法，$\mathbf{F}^3$ 中的內積及叉積都是雙線性，所以上述的乘法運算是雙線性的。

固定$\mathscr{C}$的一組基底 $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8)$，其中

$$c_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad c_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\quad c_{2+i}=\begin{pmatrix}0&e_i\\0&0\end{pmatrix},\quad c_{3+i}=\begin{pmatrix}0&0\\e_i&0\end{pmatrix}$$

$(i=1,2,3)$

易證$\mathscr{C}$的乘法表如表一

表　一

	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8
c_1	c_1	0	c_3	c_4	c_5	0	0	0
c_2	0	c_2	0	0	0	c_6	c_7	c_8
c_3	0	c_3	0	c_8	$-c_7$	$-c$	0	0
c_4	0	c_4	$-c_8$	0	c_6	0	$-c_1$	0
c_5	0	c_5	c_7	$-c_6$	0	0	0	$-c_1$
c_6	c_6	0	$-c_2$	0	0	0	c_5	$-c_4$
c_7	c_7	0	0	$-c_2$	0	$-c_5$	0	c_3
c_8	c_8	0	0	0	$-c_2$	c_4	$-c_3$	0

注意，$c_1+c_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$的作用如代數$\mathscr{C}$的么元。照慣例，檢驗交換子$cc'-c'c$（利用基底元素與表一）就能證明由一切的交換子生成的子空間$\mathscr{C}_0$的補維數是1，即$dim\mathscr{C}/\mathscr{C}_0=1$，又$\mathscr{C}_0$的基底是（$c_1-c_2$, $c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8$），所以$\mathscr{C}_0$是子空間$\mathbf{F}_{c_1+c_2}$的補空間。不僅如此，$\mathscr{C}_0$正好是由$\mathscr{C}$中「跡」爲 0 的元素（$b=-a$）所組成的子空間。由乘法規則得知$\mathscr{C}$的任何導子都將「常數」($c_1+c_2$的倍數)映至0。他方面，任何導子作用在$\mathscr{C}_0$上時都保持$\mathscr{C}_0$不變，因此導子是由它限制$\mathscr{C}_0$在上的作用所決定的。

置$L=Der\mathscr{C}$。由前面的說明，L在$\mathscr{C}_0$上有信實的作用（而且將$\mathbf{F}(c_1+c_2)$送至0）。以$\phi: L\longrightarrow gl(7,\mathbf{F})$表示矩陣表現（$\mathscr{C}_0$

的基底選擇如上）。現在的問題是要證明L不至於太小，爲此之故，我們要實在地舉出一些 $\mathscr{C}$ 的導子。因爲 G_2 型的長根形成一個 A_2 型的根系，L 應當包含一個和 $sl(3,\mathbf{F})$ 是同構的子代數。對 $x\in sl(3,\mathbf{F})$ 定義一個自同態 $\delta(x):\mathscr{C}\longrightarrow\mathscr{C}$將$\begin{pmatrix} a & v \\ w & b \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 0 & x(v) \\ -x^t(w) & 0 \end{pmatrix}$（$x^t=x$ 的轉置）。照慣例，我們只要證明 $\delta(x)$ 是一導子而且 $x\longrightarrow\delta(x)$ 是一個（非自明，因此是信實的）$sl(3,\mathbf{F})$ 的表現。以 M 表示 $sl(3,\mathbf{F})$ 的像而以 H 表示對角代數的像。（注意 $\phi(M)\subset o(7,\mathbf{F})$ 而且 $\phi(H)$ 與原先 G_2 的 CSA 是一致的。）我們很容易驗出在 $gl(8,\mathbf{F})$ 中和H交換的矩陣都是 $diag(x,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)$（原書的$x$ 其位置不對），其中 $x\in gl(2,\mathbf{F})$ 而且這樣的一個矩陣如果是$\mathscr{C}$的一個導子則必早已落在H中了。所以 $C_L(H)=H$。因爲$Z(M)=0$，所以我們也導出$Z(L)=0$。

爲了要證明L是 G_2 型單代數，我們就要找更多的導子（對應到短根），然後利用他們來證明L在 $\mathscr{C}_0$ 上的作用是既約的。事實上，我們在 $\mathscr{C}_0$ 中選取基底使得L的矩陣表現ϕ正好是以上所研究的那一個（在 $o(7,\mathbf{F})$ 中）。如果直接證明先前的代數L是由$\mathscr{C}$的導子的像所組成是可能的（但是太繁了！）。在以下的習題中，我們提出另一種做法，那就是我們能够實際地定義出$\mathscr{C}$的某些導子（稱爲內導子）而且接着能證明他們是對應到那些在前面所列出的矩陣的。

習　題

1. 如果L是一個李代數而且〔LL〕是半單，則L是減縮的

2. 對於在（19.2）中略述的討論，試給以詳細的證明。

3. 令 $L\subset o(7,\mathbf{F})$ 如（19.3）中所造的代數。試利用L在轉置作用下是封閉的事實，證明L是半單的（參考習 4.1）。

4. 試證在（19.3）中關於 $\mathscr{C}_0$ 所做的主張。

5. 試證定義如 (19.3) 的 $\delta(x)$, $x\in sl(3,\mathbf{F})$ 是$\mathscr{C}$的一個導子。

6. 試證 Cayley 代數$\mathscr{C}$滿足“交錯律” $x^2y=x(xy)$, $yx^2=(yx)x$。在任何滿足交錯律的代數$\mathscr{A}$中，試證具有以下形式的自同態事實上是一個導子：〔λ_a, λ_b〕+〔λ_a, ρ_b〕+〔ρ_a, ρ_b〕a，$b\in\mathscr{A}$, λ_a=在$\mathscr{A}$中左乘以 a 的映射，ρ_b=在$\mathscr{A}$中右乘以 b 的映射，括弧表示一般自同形的交換子）。

7. 試詳細地證明 (19.3) 的結論中的論斷。

附　註

Tits 以一個一致的方式造了五個例外的單代數，詳情請參考 Jacobson〔2〕，Schafer〔1〕。Seligman〔1〕也探討佈於特徵數 p 的體F上的單代數，讀者可參考 Kaplansky〔1〕，Pollack〔1〕 從 $o(7,F)$ 中造子代數 G_2 是取自Expose 14 of Seminaire “Sophus Lie”〔1〕(然而，在那裏的一些公式包含了一些錯誤。)

第六章　表現理論

在這一整章中，L將表示一個半單李代數（佈於特徵數 0 的代數封閉體上），H是L的一個固定CSA，Φ是一根系，$\Delta=\{\alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_l\}$是$\Phi$的一組基底，$\mathscr{W}$是 Weyl 羣。我們的主要目的是研究有限維$L$-模（雖然某些無限維模也會出現）。由於 Weyl 定理（關於完全可約性），使得既約模在有限維的情形下扮演了一個最主要的角色。

20.　權與極大向量

20.1.　權空間

如果V是一有限維L模，由定理 6.4 知H在V上的作用是對角的：$V=\amalg V_\lambda$，其中λ取盡H^*的元素而且$V_\lambda=\{v\in V\,|\,h\cdot v=\lambda(h)v\ \forall\ h\in H\}$。對於任意$V$,$V_\lambda$還是有定義的；一旦$V_\lambda\neq 0$，我們就稱它是一個權空間而且我們稱$\lambda$是$V$的一個權（更確切地說法「$\lambda$是$H$在$V$的上一個權」）。

範例　(1) L在正則表現下是一個L模，其權就是根$\alpha\in\Phi$（權空間L_α是 1 維）和 0（權空間H是l維的）。

(2) 當$L=sl(2,\mathbf{F})$時，H上的線性函數λ是完全決定於它在基底向量h上所取的值$\lambda(h)$；所以我們可以有效地利用第七節中所討論的權。（希望讀者複習那一節的內容）。

如果$dimV=\infty$，則無法保證V是其權空間的和（習題 2）。然

而，一切的權空間的和V'恒爲直和：證明方法實質上是和我們證明一個線性變換的相異固有值的固有向量是線性獨立是一樣的(習題 1)。V' 是 V 的一個子 L 模：這可由 $L_\alpha(\alpha\in\Phi)$ 對於權空間有排列作用的事實而得證。即，設 $x\in L_\alpha$, $v\in V_\lambda$, $h\in H$ 則 $h\cdot x\cdot v=x\cdot h\cdot v+[hx]\cdot v=(\lambda(h)+\alpha(h))x\cdot v$，所以 L_α 把 V_λ 送至 $V_{\lambda+\alpha}$。總結以上結果就得：

引理 令V是L的一個模。則

(a) L_α 把 V_λ 映至 $V_{\lambda+\alpha}(\lambda\in H^*,\alpha\in\Phi)$。

(b) $V'=\sum_{\lambda\in H^*}V_\lambda$ 是一直和，而且 V' 是V的一個子 L-模。

(c) 如果 $dimV<\infty$，則 $V=V'$。

20.2. 標準循環模

依定義，在一個L模V中的一個極大向量（屬於權 λ ）是一非零向量 $v^+\in V_\lambda, L_\alpha\cdot v_\lambda=0\ \forall\alpha\succ 0$ （或$\alpha\in\Delta$）。這觀念是和Δ的選取法相關的。譬如，設L是一單代數，而β是在Φ中關於Δ的極大根(引理 10.4A)，那麼對於L的正則表現來說，L_β 的任何非零向量都是極大向量；在此情形下，這些顯然是僅有的極大向量。當 $dimV=\infty$時，極大向量不一定存在，然而正好相反的，如果 $dimV<\infty$時，則 Borel 子代數 (16.3) $B(\Delta)=H+\coprod_{\alpha\succ 0}L_\alpha$ 有一共同固有向量，這是 Lie 定理所主張的，而這個固有向量就是上面定義的極大向量。

爲了要研究有限維既約 L模，先研究由一極大向量生成的 L-模是很有用的。如果 $V=\mathscr{U}(V)\cdot v^+$，其中 $v^+\in V_\lambda$ 是一極大向量，我們就簡稱V是標準循環的（屬於權 λ ）而且我們稱 λ 是V的最高權。描述這種模的結構的很容易的。固定非零的 $x_\alpha\in L_\alpha$ $(\alpha\succ 0)$，並且選取 $y_\alpha\in L_{-\alpha}$（唯一地）使得 $[x_\alpha y_\alpha]=h_\alpha$。記住，在第十節中對於歐

氏空間E所介紹的偏序：$\lambda \succ \mu \Longleftrightarrow \lambda - \mu$ 是某些正根的和（$\lambda, \mu \in H^*$）也是適用於 H^* 上。以下定理的（b）部分說明了 λ 叫做「最高權」的原因。

定理　令V是一標準循環 L-模，其極大向量 $v^+ \in V_\lambda$。令 $\Phi^+ = \{\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots, \beta_m\}$。則

(a) V是由 $y_{\beta_1}^{i_1} \cdots\cdots y_{\beta_m}^{i_m} \cdot v^+ (i_j \in \mathbf{Z}^+)$ 諸向量生成的；特別，V是它的權空間的直和。

(b) V的權的形式都如 $\mu = \lambda - \sum_{i=1}^{l} k_i \alpha_i$ 一般($k_i \in Z^+$)，卽一切滿足 $\mu \prec \lambda$ 的權。

(c) 對於每一 $\mu \in H^*$，恆有 $dim V_\mu < \infty$ 而且 $dim V_\lambda = 1$。

(d) V是一個不可分解L-模，它有一唯一的極大（眞）子模。

(e) V的每一非零同態像也是屬權 λ 的標準循環模

證明　$L = N^- + B$，其中 $N^- = \coprod_{\alpha < 0} L_\alpha$ 而且 $B = B(\Delta)$。由 PBW 定理（定理 17.3 的系C及系D）得 $\mathscr{U}(L) \cdot v^+ = \mathscr{U}(N^-) \mathscr{U}(B) \cdot v^+ = \mathscr{U}(N^-) \cdot \mathbf{F}_{v^+}$（因爲 v^+ 是 B 的一個共同固有向量）。現在 $\mathscr{U}(N^-)$ 有一基底是由諸單項式 $y_{\beta_1}{}^{i_1} \cdots\cdots y_{\beta_m}{}^{i_m}$ 組成的，所以（a）得證。

向量（*）$y_{\beta_1}{}^{i_1} \cdots\cdots y_{\beta_m}{}^{i_m}$ 的權是 $\lambda - \sum_j i_j \beta_j$（引理 20.1(a)）。重新改寫 β_j 成單根的一個非負 $\mathbf{Z}$- 線性組合（如第十節）。我們就得(b)。

顯然在(b)中只有有限個的向量(*)使 $\sum i_j \beta_j$ 等於預定的 $\sum_{i=1}^{l} k_i \alpha_i$。由（a）知，如果 $\mu = \lambda - \sum k_i \alpha_i$，則這些向量生成權空間 V_μ。不僅如此，形如（*）的向量如果其權是 $\mu = \lambda$ 則必是 v^+ 本身，因此（c）也得證。

至於（d），假定 $V = V_1 \oplus V_2$（子 L-模的直和）。記 $v^+ = v_1 +$

$v_2, v_i \in V_i$, $i = 1, 2$。則對於一切的 $b \in B$, $b \cdot v^+ = b \cdot v_1 + b \cdot v_2$ 是 v^+ 的倍數，因此使得 v_1, v_2 成爲權 λ 的極大向量（如果$vV \neq 0$）由 (c), $v \neq 0$ 所以 v_i 是 v^+ 的一個倍數。由直和知 $v_1 = 0$ 或 $v_2 = 0$ 所以 $v^+ \in V_2$ 或 $v^+ \in V_1$ 卽 $V = V_2$ 或 $V = V_1$（因爲 v^+ 生成 V）。同理，V 的每一眞子模顯然都是落在 V_λ 以外的權空間的和裏，所以一切這樣的子模的和還是眞子模。

最後，(e) 是明顯的。

系　設V如定理。再假定V是一旣約 L- 模。則V中的任意極大向量都是 v^+ 的純量倍數（某種程度的唯一性）。

證明　如果 w^+ 是另一個極大向量，則 $\mathscr{U}(L)w^+ = V$（因爲V是旣約的）所以定理可同時應用在 v^+ 及 w^+ 上。如果 w^+ 的權是 λ'，則 $\lambda' \prec \lambda$ 而且 $\lambda \prec \lambda'$（由 (b)）所以 $\lambda = \lambda'$。於是（由 (c)）w^+ 和 v^+ 是成比例。

20.3.　存在與唯一定理

我們要證明對於每一 $\lambda \in H^*$，存在一個以 λ 爲最高權的旣約標準循環 L- 模，它可能是無限維。不僅如此，任意兩個這種模是同構的。同構的部分是不難的（討論方法和定理 14.2 的證明方法相似，但卻較爲簡單）。

定理 A　令V, W，是以 λ 爲最高權的標準循環模。如果V與W是旣約，則V與W是同構的。

證明　造 L- 模$X = V \oplus W$。如果 v^+, w^+ 分別是在V, W中屬權 λ 的極大向量，令 $x^+ = (v^+, w^+) \in X$，所以 x^+ 是屬權 λ 的極大向量。令Y是X中由 x^+ 生成的子 L- 模（Y是標準循環的），而且令 $p: Y \longrightarrow V$, $p': Y \longrightarrow W$ 是由 X 投射到V及W的投影所引出的映射。p, p' 顯然是 L- 模同態；因爲 $p(x^+) = v^+$, $p'(x^+) = w^+$，所以

$Im\ p=V$，$Im\ p'=W$也是顯然的。我們主張 p，p' 都是嵌射（所以看成 L- 模時 Y 與 V 及 Y 與 W 是同構，因而定理得證）。事實上，$Ker\,p'$ 是 $V\cap Y$（V 認同於 X 的 $(u,0)$, $u\in V$），它是 V 的一個子 L-模。因爲 V 是既約的。所以 $V\cap Y=0$ 或 V。後者是不可能的：$(v^+,0)\in Y$ 會使得 $(v^+,0)$ 是 (v^+,w^+) 的倍數（定理 20.2(c)），這是荒謬的。因此 p'（同理，p）是一嵌射。

其次，我們考慮存在問題。撇開既約性，剩下的問題是：到底我們要如何造一標準循環模？我們有兩種說明方式可以進行，他們都得到相同的結果。

首先，我們看一個誘導模建構（它和有限羣的表現理論中所用的技巧相似）。這是由以下的觀察而聯想到的：一標準循環模，看成 B-模時（$B=B(\Delta)$，如前）會包含一由已知極大向量生成的一維子模。於是我們由以 v^+ 爲基底的一維向量空間 D_λ 開始，並且定義 B 在 D_λ 上的作用如 $(h+\sum_{\alpha>0}x_\alpha)\cdot v^+=h\cdot v^+=\lambda(h)v^+$，$\lambda\in H^*$ 是固定的。讀者很快就會相信這使 D_λ 確實成爲一個 B-模。當然，D_λ 也同時是一個 $\mathscr{U}(B)$-模，所以考慮張量積 $Z(\lambda)=\mathscr{U}(L)\otimes_{\mathscr{U}(B)}D_\lambda$ 是合理的，而此張量積在 $\mathscr{U}(L)$ 的自然（左）作用下變成是一個 $\mathscr{U}(L)$-模。

我們主張 $Z(\lambda)$ 是屬於權 λ 的標準循環模。一方面，$1\otimes v^+$ 顯然生成 $Z(\lambda)$。他方面，因爲 $\mathscr{U}(L)$ 是一個自由 $\mathscr{U}(B)$-模（定理 17.3 的系 D）而且以 1 及各種單項式 $y_{\beta_1}{}^{i_1}\cdots\cdots y_{\beta_m}{}^{i_m}$ 組成基底，所以 $1\otimes v^+\neq 0$。因此 $1\otimes v^+$ 是屬於權 λ 的一個極大向量。就簡稱它是 v^+。

這個建裡構也說明了一件事：如果 $N^-=\coprod_{\alpha<0}L_\alpha$，則當 $Z(\lambda)$ 看成是 $\mathscr{U}(N^-)$-模時，是與 $\mathscr{U}(N^-)$ 本身同構。更確切地說，因爲 $\mathscr{U}(L)$

$\cong\mathscr{U}(N^-)\otimes\mathscr{U}(B)$（$PBW$ 定理），所以 $Z(\lambda)\cong\mathscr{U}(N^-)\otimes\mathbf{F}$（看成是左 $\mathscr{U}(N^-)$-模）。

以「生成元與關係」造 $Z(\lambda)$ 也是可能的。爲此之故，選擇非零元素$x_\alpha\in L_\alpha(\alpha\succ0)$如前，而且令$I(\lambda)$是在$\mathscr{U}(L)$中由一切的$x_\alpha(\alpha\succ0)$以及一切的 $h_\alpha-\lambda(h_\alpha)\cdot1(\alpha\in\Phi)$ 生成的左理想。注意，$I(\lambda)$ 的這些生成元零化了 $Z(\lambda)$ 的極大向量 v^+，所以 $I(\lambda)$ 也一樣，因而有一左 $\mathscr{U}(L)$-模的自然同態 $\mathscr{U}(L)/I(\lambda)\longrightarrow Z(\lambda)$ 把 1 的陪集送至極大向量 v^+。再利用 $\mathscr{U}(L)$ 的 PBW 基底，我們看到這映射把 $\mathscr{U}(B)$ 的陪集送到直線 $\mathbf{F}v^+$ 上，所以此映射是一嵌射。換句說，$Z(\lambda)$ 與 $\mathscr{U}(L)/I(\lambda)$ 是同構的。

定理 B. 令 $\lambda\in H^*$。則存在屬於權 λ 的一個既約標準循環模 $V(\lambda)$。

證明 $Z(\lambda)$（上面所造的）是屬於權 λ 的標準循環模。而且有唯一的極大子模 $Y(\lambda)$（定理 20.2(d)）。所以，$V(\lambda)=Z(\lambda)/Y(\lambda)$ 是權 λ 的既約標準循環模（定理 20.2(e)）。

還有兩個基本問題存在：(1) 決定哪一個 $V(\lambda)$ 是有限維。(2) 對於這樣的 $V(\lambda)$ 決定什麼樣的權會出現而且其重複次數是多少呢？以下諸節就是專門用來處理這些問題。

習　題

1. 如果V是任意的一個 L-模，則它的權空間的和必是直和。

2. (a) 如果V是一既約 L-模而且至少有一非零權空間，試證V是它的權空間的直和。

(b) 令V是一既約 L-模。則V有一非零權空間的一個充要條件是對於所有的 $v\in V$，$\mathscr{U}(H)v$，是有限維，或者對於所有的 $v\in V$，$\mathscr{A}v$是有限維（其中$\mathscr{A}$是在$\mathscr{U}(H)$中由任一 $h\in H$構成的子代數（具

有 1 ）。

(c) 令 $L=sl(2,\mathbf{F})$ 而其標準基底爲 (x,y,h)。試證 $1-x$ 在 $\mathscr{U}(L)$ 中是不可逆，因此落在 $\mathscr{U}(L)$ 的一個極大左理想 I 中，置 $V=\mathscr{U}(L)/I$，所以 V 是一既約 L- 模。試利用以下的事實：

$$(x-1)^r h^r \equiv \begin{cases} 0\,(mod I), & r>s \\ (-2)^r r!\cdot 1(mod I), & r=s \end{cases}$$

證明 $1, h, h^2, \cdots\cdots$ 在 V 中的像是線性獨立（所以 $dimV=\infty$）。結論：V 沒有非零權空間。

3. 試描述（1.2）中所述的線性李代數 A_l-D_l 型的自然表現的權與極大向量。

4. 令 $L=sl(2,\mathbf{F})$，$\lambda\in H^*$，試證在習題 7.7 中所造的模 $Z(\lambda)$，$\lambda=\lambda(h)$ 與（20.3）中所造的模 $Z(\lambda)$ 是同構。試由此證明 $dimV(\lambda)<\infty$ 的充要條件是 $\lambda(h)$ 爲一非負整數。

5. 如果 $\mu\in H^*$，定義 $\mathscr{P}(\mu)$ 是使得 μ 可以寫成 $\mu=\sum_{\alpha\succ 0}k_\alpha\alpha$ 的非負整數 k_α $(\alpha\succ 0)$ 的相異集合的個數。試利用 $Z(\lambda)_\mu$ 的一組基底的描述來證明 $dimZ(\lambda)_\mu=\mathscr{P}(\lambda-\mu)$。

6. 試證在(20.3)中所介紹的左理想本是由元素 $x_\alpha\cdot h_\alpha-\lambda(h_\alpha)\cdot 1$, α 單根，生成的。

7. 在不利用(20.3)中的誘導模建構之下，試證 $I(\lambda)\cap\mathscr{U}(N^-)=0$，特別，$I(\lambda)$ 是眞正地包含於 $\mathscr{U}(L)$ 中。〔試證類似的左理想 $I'(\lambda)$ 在 $\mathscr{U}(B)$ 中是不等於 $\mathscr{U}(B)$，然而由 PBW 定理得 $I(\lambda)=\mathscr{U}(N^-)I(\lambda')$。〕

8. 對於每一正整數 d，試證維數 $\le d$ 的相異既約 L-模 $V(\lambda)$ 的個數是有限的。〔如果 $dimV(\lambda)<\infty$，對於每一 $\alpha\succ 0$，把 $V(\lambda)$ 看成是 S_α- 模，注意 $\lambda(h_\alpha)\in\mathbf{Z}$，而且 $V(\lambda)$ 引出一個 S_α 子模其維

數是 $\lambda(h_\alpha)+1$。〕

9. 試證以下關於 $Z(\lambda)$ 的唯一極大子模 $Y(\lambda)$(20.3) 的描述：如果 $v\in\mathbf{Z}(\lambda)_\mu$, $\lambda-\mu=\sum_{\alpha>0}c_\alpha\alpha$ $(c_\alpha\in\mathbf{Z}^+)$，試觀察 $\prod_{\alpha>0}x_\alpha^{c_\alpha}\cdot v$ 的權是 λ（在任何固定次序中的正根），因此是極大向量 v^+ 的一個純量倍數。如果此倍數對於 c_α 的每一個選擇都是 0（參考習題 5），試證 $v\in Y(\lambda)$。反之，對於權 $\mu\neq\lambda$ 試證 $Y(\lambda)$ 是由一切這樣的權向量生成的。

10. 在 $Z(\lambda)$ 中權 μ 的一個極大向量 w^+ 引出一個 L 模同態 $\phi:Z(\mu)\longrightarrow Z(\lambda)$; 而 $Im\ \phi$ 是由 w^+ 生成的子模。試證 φ 是一個嵌射。

11. 令 V 爲一任意的有限維 L 模，$\lambda\in H^*$ 試在 L 模 $W=Z(\lambda)\otimes V$ 中造一串子模 $W=W_1\supset W_2\supset\cdots\cdots\supset W_{n+1}=0\ (n=dimV)$ 使得 W_i/W_{i-1} 與 $Z(\lambda+\lambda_i)$ 是同構的，其中 V 的權依適當的次序排列（計重複數）是 $\lambda_1,\cdots\cdots,\lambda_n$。

附　註

Lemire〔1〕處理了無限維模的權空間的存在性問題；習題 2 就是由他提出的。Verma〔1〕以及較近的 Bernstein, Gel'fand, Gel'fand〔1〕,〔2〕對模 $Z(\lambda)$ 有很深刻和詳細地研究，特別，Verma 證明了 L 模同態 $Z(\mu)\longrightarrow Z(\lambda)$ 的 F 空間的維數或者是 0 或者是 1 而且對於第二種情形他也得一充分條件，然而其餘的人證明條件的必要性。

21. 有限維模

21.1. 有限維的必要條件

假定 V 是一有限維既約 L 模。於是 V 對於唯一決定的權 λ 至少有一極大向量，而且由此向量生成的子模必是整個 V（由既約性）。

所以V和 $V(\lambda)$ 是同構的（(20.3)的定理A與定理B）。

對於每一單根 α_i，令 $S_i(=S_{\alpha_i})$ 是在L中與 $sl(2,\mathbf{F})$ 同構的子代數。則 $V(\lambda)$ 也是 S_i 的一個有限維模而且L的一個極大向量也是 S_i 的一個極大向量。特別，如果有屬於權 λ 的一個極大向量，則 $CSA\ H_i \subset S_i$ 的權是完全由純量 $\lambda(h_i)$，$h_i=h_{\alpha_i}$ 所決定的。但這使得 $\lambda(h_i)$ 成爲一個非負整數（利用定理 7.2）。這就證明了:

定理　如果V是最高權λ的一個有限維L模，則 $\lambda(h_i)$ 是一個非負整數 $(1\leq i\leq l)$。

更一般，由 (7.2) 知，如果V是任何有限維L模，μ是V的一個權，則 $\mu(h_1)=<\mu,\alpha_i>\in Z$，$1\leq i\leq l$。於是，出現在一有限維模的權也是在第十三節中所建立的理論下的權，所以在那裏所證得的結果從此以後都變得很有用了。注意，在第十三節的語言裏，$V(\lambda)$ 的最高權 λ（當 $dimV<\infty$）是制囿權。爲了避免含糊不清，我們繼續稱呼 H^* 的任何元素爲一個權，然而一個線性函數λ如果它的一切 $\lambda(h_i)$（因此一切 $\lambda(h_\alpha)$)是整數者稱爲整線性函數。如果一切的 $\lambda(h_i)$ 是非負整數時，我們就稱 λ 是制囿整線性函數。所有整線性函數的集合Λ因此是 H^*（也可說是在由根生成的實歐氏空間）中的一個格子，它包含一個根格子。如第十三節，我們以 Λ^+ 表示制囿整線性函數集合。

還有一些很方便的記號：如果V是一個L模，令 $\Pi(V)$ 表示V的權集合。如果$V=V(\lambda)$ 則以 $\Pi(\lambda)$ 代替 $\Pi(V)$。

21.2. 有限維的充分條件

定理　如果 $\lambda\in H^*$ 是制囿整線性函數，則既約L模是有限維，而且$\mathscr{W}$對它的權集合 $\Pi(\lambda)$ 有排列的作用，又對 $\sigma\in\mathscr{W}$，$dimV_\mu=dimV_{\sigma\mu}$

系 映射 $\lambda \longrightarrow V(\lambda)$ 在 Λ^+ 與有限維的既約 L 模的同構類之間引出一個對射。

系理的證明 由定理 21.1 以及 (20.3) 的定理 A,定理 B 得知此系理可由定理而得。

定理的證明 首先先記下一些關於 $\mathscr{U}(L)$ 中的交換子的資料將會是很方便的。固定 L 的標準生成元 $\{x_i, y_i\}$。

引理 以下的等式在 $\mathscr{U}(L)$ 中是成立的;

(a) $[x_j, y_i^{k+1}] = 0$, $i \neq j$;

(b) $[h_j, y_i^{k+1}] = -(k+1)\alpha_i(h_j)y_i^{k+1}$;

(c) $[x_i, y_i^{k+1}] = -(k+1)y_i^k(k \cdot 1 - h_i)$,

$k \geq 0$, $1 \leq i, j \leq l$。

證明 當 $i \neq j$ 時 $\alpha_j - \alpha_i$ 不是一個根 (引理 10.1) 由此一事實卽得 (a)。

對於 (b), 可利用數學歸納法。$k = 0$ 時, $[h_j, y_i] = -\alpha_i(h_j)y_i$ (參考(18.1)) 。一般, 左端等於 $h_j y_i^{k+1} - y_i^{k+1}h_j = (h_j y_i^k - y_i^k h_j) y_i + y_i^k(h_j y_i - y_i h_j) = -k\alpha_i(h_j)y_i^k y_i + y_i^k(-\alpha_i(h_j)y_i) = -(k+1) \alpha_i(h_j)y_i^{k+1}$, 在最後第二步利用數學歸納法。

對於 (c) 記 $[x_i, y_i^{k+1}] = x_i y_i^{k+1} - y_i^{k+1}x_i = [x_i, y_i]y_i^k + y_i[x_i, y_i^k] = h_i y_i^k + y_i[x_i, y_i^k]$, 而且利用歸納法以及公式 (b) (以 k 代替 $k+1$) 就得證。

定理的證明將分幾個步驟進行。主要的想法是證明 V 的權集合是被 $\mathscr{W}$ 所排列的, 因此是有限的 (參考定理 18.3 的證明) 。以 $\phi: L \longrightarrow gl(V)$ 表示由 V 所提供的表現是方便的。固定 V 的一個極大向量 (屬於權 λ) , 而且置 $m_i = \lambda(h_i)$, $1 \leq i \leq l$。由假設知 m_i 是非負整數。

(1) $y_i^{m_i+1} \cdot v^+ = 0$。令 $w = y_i^{m_i+1} \cdot v^+$ 由引理的(a)得知當 $i \neq j$

時，$x_j\cdot w=0$。他方面，引理的 (b) 及 (c) 證明 $x_i y_i^{m_i+1}\cdot v^+=y_i^{m_i+1}x_i\cdot v^+-(m_i+1)y_i^{m_i}\cdot(m_i v^+-m_i v^+)=0$，所以 $x_i\cdot w=0$。如果w不是0，則必是在V中屬於權 $\lambda-(m_i+1)\alpha_i\neq\lambda$ 的一個極大向量，這就與系 20.2 不合。

(2) 對於 $1\leq i\leq l$，V包含一個非零有限維 S_i 模。由 (1) 得知由 $v^+, y_i\cdot v^+, y_i^2 v^+, \cdots\cdots y_i^{m_i}v^+$ 生成的子空間在 y_i 的作用下保持不變。因爲每一個生成元都屬於V的一個權空間，所以此子空間在 h_i 的作用下保持不變；由引理的 (c) 及歸納法得知它在 x_i 的作用下也保持不變。

(3) V是有限維子 S_i 模的和。如果 V' 是這種子模和，則由(2)得知 $V'\neq 0$。他方面，令W是V 的任意有限維子 S_i 模。由一切的子空間 $x_\alpha W(\alpha\in\Phi)$ 生成的顯然是有限維而且在 S_i 的作用下保持不變。所以 V' 在L的作用下保持不變，但是V是旣約的，因此 $V'=V$。

(4) 對於 $1\leq i\leq l$，$\phi(x_i)$ 與 $\phi(y_i)$ 是V的局部冪零自同態（參考 (18.3)）。事實上，如果 $v\in V$，則由 (3) 得知v落在有限維 S_i 模的一有限和（因此落在一有限維 S_i 模）中。在這樣的一個模上，$\phi(x_i)$ 與 $\phi(y_i)$ 是冪零的（參考 (6.4)）。

(5) $s_i=exp\phi(x_i)exp\phi(-y_i)exp\phi(x_i)$ 是定義在V上的一個自同構。這可由 (4) 立即得證（再參考 (18.3)）。

(6) 如果 μ 是 V的任意權，則 $s_i(V_\mu)=V\sigma_i\mu$ （σ_i 是關於 α_i 的鏡射）。V_μ 落在一有限維 S_i 模 V' 中（參考 (3)），而且 $s_i|_{V'}$ 和 (7.2) 中所造的自同構 τ 是一樣的；現在由 (7.2) 中的討論就證得主張。

(7) 權集合 $\pi(\lambda)$ 在$\mathscr{W}$ 的作用下保持不變，而且 $dimV_\mu=dim V_{\sigma\mu}(\mu\in\pi(\lambda),\sigma\in\mathscr{W})$。因爲$\mathscr{W}$是由 $\sigma_1,\cdots\cdots,\sigma_l$ 生成的（定理 10.3

），所以由(6)即得。

(8) $\Pi(\lambda)$是有限的。由引理 13.2B 得知集合 $\{\sigma\mu | \mu \prec \lambda$ 制囿整線性函數，$\sigma \in \mathscr{W}\}$是有限的。但是由定理 20.2 以及(7)得知 $\pi(\lambda)$ 是包含在此一集合內。

(9) $dim\, V$ 是有限的。由定理 20.2(c) 得知對於一切的 $\mu \in \Pi(\lambda)$, $dim V_\mu$ 是有限的。加上 (8) 就證明了我們的主張。

21.3. 權鏈與權圖

我們還是考慮有限維的情形，$V = V(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda^+$。令 $\mu \in \Pi(\lambda)$, $\alpha \in \Phi$。引理 20.1 證明了在V中由一切的權空間 $V_{\mu+i\alpha}(i \in \mathbf{Z})$ 生成的子空間W在 S_α 的作用下保持不變。由 (7.2) 與有關完全可約性的Weyl 定理得知在$\Pi(\lambda)$ 中形如 $\mu + i\alpha$ 的權必形成一連結的鏈（過μ的鏈，它是正則表現中過α的 β-根鏈的觀念的推廣）。不僅如此，鏡射 σ_α 會反轉這一鏈。如果權鏈是由 $\mu - r\alpha, \cdots\cdots, \mu, \cdots\cdots \mu + q\alpha$ 所組成，則 $r - q = \langle \mu, \alpha \rangle$。由 (13.4) 得知這證明了以下的結果。

命題 如果 $\lambda \in \Lambda^+$，則集合$\Pi(\lambda)$ 在 (13.4) 的意義下是一個飽和集。特別，如果 $\mu \in \Lambda$，則 $\mu \in \pi(\lambda)$ 的充分必要條件是 μ與μ所有的$\mathscr{W}$共軛都是$\prec \lambda$。

當 $rank\ \Phi \leq 2$ 時，如果我們畫一權圖則這一切都很容易看出。例如，令 $L = sl(3, \mathbf{F})$ （A_2 型），以 λ_1, λ_2 爲基本制囿整線性函數(13.2). $V(\lambda)$, $\lambda = 4\lambda_1 + 3\lambda_2$, 的權圖如圖一所示。

圖上的點表示權的出現所在。在此情形下重複數也被表示出，由 1 增加至 4（由外殼通至內殼，重複數 $dim V_\mu$ 平穩地一個一個增加至殼變成三角形，在那裏重複數是平穩的）。這些重複數的簡單行爲正是 A_2 型的一個特殊事實 (Antoine, Speiser〔1〕)。至於其他根系，情形比較複雜多了；有關重複數的更詳細討論可參考以下第二十二節。

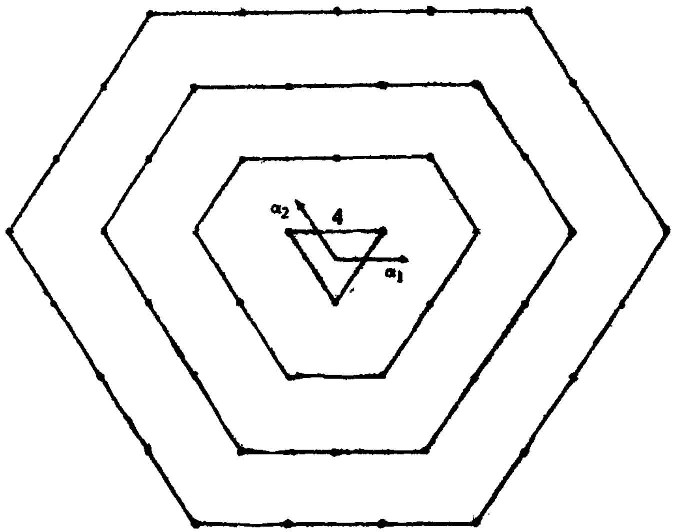


圖　一

21.4. $V(\lambda)$ 的生成元與關係

當 λ 是一個制囿整數權時，對於由 $Z(\lambda)$ 至其同態像的過程來說我們能描述得更精確些。這樣的描述並不用於任何地方，只不過是爲了興趣而已。事實上，我們將定理 21.2 的一些證明重新整理一下。

我們回憶一下，由(20.3)得知 $Z(\lambda)$ 與 $\mathscr{U}(L)/I(\lambda)$ 是同構的，其中 $I(\lambda)$ 是在 $\mathscr{U}(L)$ 中由一切的 $x_\alpha(\alpha>0)$，及由一切的 $h_\alpha-\lambda(h_\alpha)\cdot 1(\alpha\in\Phi)$ 生成的左理想。也等於說，$I(\lambda)$ 是 $Z(\lambda)$ 的一個極大向量的零化子。現在固定一個制囿整線性函數 λ，並且令 $J(\lambda)$ 是在 $\mathscr{U}(L)$ 中會零化 $V(\lambda)$ 的整個極大向量的左理想。包含 $I(\lambda)\subset J(\lambda)$ 引出一個自然映射 $Z(\lambda)=\mathscr{U}(L)/I(\lambda)\longrightarrow V(\lambda)\cong\mathscr{U}(L)/J(\lambda)$。

由定理 21.2 的證明我們記得 $y_i^{m_i+1}\in J(\lambda)$, $1\leq i\leq l$，其中 $m_i=<\lambda,\alpha_i>$。

定理 令 $\lambda\in\Lambda^+, m_i=<\lambda,\alpha_i>(1\leq i\leq l)$ 則 $J(\lambda)$ 是由 $I(\lambda)$ 與一切的 $y_i^{m_i+1}(1\leq i\leq l)$ 生成的。

證明 假定我們已證明 $V'(\lambda)=\mathscr{U}(L)/J'(\lambda)$ 是有限維的，其中 $J'(\lambda)$ 是由 $I(\lambda)$ 及一切的 $y_i^{m_i+1}$ 所生成的左理想。因爲 $V'(\lambda)$ 是標準循環的（或是0），它必須是旣約的（或是0）（定理 20.2(d) 和關於完全可約性的 Weyl 定理）。但是 $J'(\lambda)\subset J(\lambda)$ 導致 $V(\lambda)$ 成爲 $V'(\lambda)$ 的同態像，這使得 $V'(\lambda)\cong V(\lambda)$，因此 $J'(\lambda)=J(\lambda)$ 正是我們所要的。

爲了證明 $V'(\lambda)$ 是有限維，我們只要證明 $V'(\lambda)$ 是諸有限維子 S_i 模 $(1\leq i\leq l)$ 的和就可以了，因爲這樣一來定理 21.2 的證明就可以像以前一樣的有效。爲此，只要證明每一個 y_i 在 $V'(\lambda)$ 上是局部冪零就足够了（因爲 $\mu+k\alpha\prec\lambda$ 不可能對一切 k 都成立，所以對於 x_i 來說上面的主張當然是很明顯的）。由假設，1 在 $V'(\lambda)$ 中的陪集是在 y_i 的一個適當冪（卽m_i+1）的作用下變成0。我們知道（ 理20.2）$V'(\lambda)$ 是由所有的 $y_{i_1}\cdots\cdots y_{i_t}$ $(1\leq i_j\leq l)$ 的陪集生成的。如果這一單項式的陪集被 y_i^k 送至 $J(\lambda)$，則以下的引理能證明更長的單項式 $y_{i_0}y_{i_1}\cdots\cdots y_{i_t}$ 也被y_i^{k+3} 送至 $J'(\lambda)$。現在只要對單項式的長度做歸納就可以了，由 1 開始就能證明 y_i 的局部冪零性。

引理 令 $\mathscr{A}$是佈於 F 上的一個結合代數，y，$z\in\mathscr{A}$。則 $[y^k, z]=\binom{k}{1}[y,z]y^{k-1}+\binom{k}{2}[y,[yz]]y^{k-2}+\cdots\cdots+[y,\cdots\cdots[y,z]\cdots\cdots]\cdots\cdots]$。

證明 對 k 做歸納；當 $k=1$ 時，$[yz]=[yz]$。其餘的步驟是很容易，由讀者自己完成。

爲了應用引理，取 $\mathscr{A}$ 爲 $\mathscr{U}(L)$ 並且取 y，z 爲分屬於兩個負根

的根向量。因爲根的長度最多是4，所以 $(ad\,y)^4(z)=0$，因此引理中的等式就化成爲：

$$[y^k, z]=k[y, z]\cdot^{k-1}+\binom{k}{2}[y,[y,[y,z]]]y^{k-2}+\binom{k}{3}$$

$[y,[y[y,z]]]y^{k-3}$。

習　題

1. 讀者能够檢驗出在這一節裏我們還沒利用 $\mathscr{W}$ 在 Φ 的基底上的單傳遞性（定理 10.3(e)），而只用到傳遞性。利用表現理論我們能得到一個新的證明如下：存在一有限維既約模 $V(\lambda)$ 使得一切的 $<\lambda,\alpha>$ $(\alpha\in\Delta)$ 都是相異的而且是正的。如果 $\sigma\in\mathscr{W}$ 在 Δ 上有排列作用，則 $\sigma\lambda=\lambda$ 必使 $\sigma=1$。

2. 試畫 B_2, $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$（第三章的記號）的權圖。

3. 令 $\lambda\in\Lambda^+$ 試證0是 $V(\lambda)$ 的的一個權的充要條件是 λ 爲諸根的一個和。

4. 試回憶（20.3）中所建構的模 $Z(\lambda)$。當 $\lambda\in\Lambda$，試利用引理 21.2 在 $Z(\lambda)$ 中求出極大向里：如果 m_i 是非負的則 $y_i^{m_i+1}, m_i=<\lambda,\alpha_i>$，是一個極大向量（參考習題 7.7。）。

5. 令 V 爲一信實有限維 L 模。$\Lambda(V)$ 是在 Λ 中由 V 的權生成的子羣。則 $\Lambda(V)\supset\Lambda_r$。試證在 Λ 中包含 Λ_r 的每一子羣都是這一型。

6. 如果 $V=V(\lambda)$, $\lambda\in\Lambda^+$, 試證 V^*（看成是 L 模）與 $V(-\sigma\lambda)$ 是同構的，其中 $\sigma\in\mathscr{W}$ 是在 $\mathscr{W}$ 中把 Δ 送至 $-\Delta$ 的唯一元素（習題 10.9，參考習題 13.4）。

7. 令 $V=V(\lambda), W=V(\mu), \lambda,\mu\in\Lambda^+$。試證 $\Pi(V\otimes W)=\{\nu+\nu'\mid\nu\in\Pi(\lambda),\nu'\in\Pi(\mu)\}$ 而且 $dim(V\otimes W)_{\nu+\nu'}=\sum_{\pi+\pi'=\nu+\nu'} dimV_{\pi}'\cdot dim$

W_π'。特別，$\lambda+\mu$ 只出現一次，所以 $V(\lambda+\mu)$ 也在 $V\otimes W$ 中恰好出現一次。

8. 令 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_l$ 是 L 的根系Φ的基本制囿權 (13.1)。試說明如何造一任意的 $V(\lambda)$, $\lambda\in\Lambda^+$, 使其成爲模 $V(\lambda_1), \cdots\cdots, V(\lambda_l)$（容許重複）的一個適當張量積的一個直和分量。

9. 試證引理 21.4 並且由此導出引理 21.2。

10. 令 $L=sl(l+1, \mathbf{F})$，而 $H=d(l+1, \mathbf{F})$ 爲其 CSA。令 $\mu_1, \cdots\cdots, \mu_{l+1}$ 爲 H 上關於 $gl(l+1, \mathbf{F})$ 的標準基底的坐標函數。則 $\sum\mu_i=0$，而且 $\mu_1, \cdots\cdots \mu_l$ 形成 H^* 的一組基底，然而集合 $\{\alpha_i=\mu_i-\mu_{i+1} | 1\leq i\leq l\}$ 是根系Φ的一組底Δ。試證 $\mathscr{W}$ 在 H^* 的作用是對 μ_i 等做排列；特別關於 α_i 的對稱把 μ_i 與 μ_{i+1} 互換而固定其他的 μ_j。接着試證 $\lambda_k=\mu_1+\mu_2+\cdots\cdots+\mu_k$ $(1\leq k\leq l)$ 是關於 Δ 的基本制囿權。

11. 令 $V=\mathbf{F}^{l+1}$，$L=sl(V)$ 固定 CSA H 以及Φ的基底 $\Delta=(\alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_l)$ 如習題10。這個習題的目的是造一個屬於最高權 λ_k 的既約 L 模 $V_k (1\leq k\leq l)$。

(1) 對於 $k=1$, $V_1=V$ 是既約其權爲 λ_1。

(2) 在 k 重張量乘稱 $V\otimes\cdots\cdots\otimes V$ 中，$k\geq 2$，定義 V_k 是由斜稱張量所成的子空間：如果 $(v_1, \cdots\cdots, v_{l+1})$ 是 V 的典型基底，V_k 有一組基底是由 $\binom{l+1}{k}$ 個向量組成其定義如下：

(*) $$[v_{i_1}, \cdots\cdots, v_{i_k}]=\sum_{\pi\in S_k} sn(\pi) v_{\pi(i_1)}\otimes\cdots\cdots\otimes v_{\pi(i_k)}$$

其中 $i_1<i_2<\cdots\cdots<i_k$。試證 (*) 的權是 $\mu_{i_1}+\cdots\cdots\mu_{i_k}$。

(3) 試證在 L 的作用下，子空間 V_k 保持不變而且所有的權 $\mu_{i_1}+\cdots\cdots\mu_{i_k} (i_1<\cdots\cdots<i_k)$ 都是相異而且在 $\mathscr{W}$ 的作用下是共軛的。試結論 V_k 是既約其最高權是 λ_k。（參考習題 13.13）

附 註

定理 21.4 多多少少是衆所皆知的；我們的處理過程是基於 Verma 的論文的補充〔1〕，也可參考 Harrish-Chandra.〔1〕A_2 的權圖出現於 Antoine, Speiser〔1〕；也可參考 Kolman, Belinfante〔1〕與 Samelson〔1〕。

22. 重複數公式

在這一節中所考慮的模都是有限維的。

如果 $\mu \in H^*$ 是一整線性函數，定義 μ 在 $V(\lambda)$ 中，$\lambda \in \Lambda^+$, 的重複數爲 $m_\lambda(\mu)=dim V(\lambda)_\mu$。（當 μ 不是 $V(\lambda)$ 的權時則爲 0。）當 λ 固定時我們只記爲 $m(\mu)$。我們的目標是想藉計算 $V(\lambda)_\mu$ 上的一個 Casimir 型元素的跡而導出 $m_\lambda(\mu)$ 的 Freudenthal 遞推公式；在問題中的元素在 $V(\lambda)$ 上的作用有如一非零純量，利用此一事實我們能够再獲得 $dim V(\lambda)_\mu$。

22.1. 一個泛 Casimir 元素

先回憶一下（6.2）所陳述的 Casimir 元素的觀念；它是建立在 L 的一個表現上。我們曾利用這觀念證明有關完全可約性的 Weyl 定理。現在 $\mathscr{U}(L)$ 是有用的，我們可以建立一個這種的泛建構。

我們以 L 的正則表現爲出發點。它的跡形式就是 Killing 形式 κ。由第八節很容易導出關於 κ 的對偶基底的自然建構。如果 α, β 是H上任意的線性函數，我們知道除了 $\beta=-\alpha$ 之外，L_α 與 L_β 是正交(命題 8.1)。我們也知道 κ 在H上的限制是非退化的。所以我們可以進行如下。選H的任意基底，就說 $(h_1, \cdots\cdots, h_l)$（關於Δ）是一標準的基底，並且令 $(k_1, \cdots\cdots, k_l)$ 是H關於 $\kappa|_H$ 的對偶基底。其次在每一個 L_α $(\alpha\in\Phi)$中取非零 x_α，並且令 z_α 是 $L_{-\alpha}$ 的（唯一）元

素滿足 $\kappa(x_\alpha, z_\alpha)=1$。由上面的註釋，基底 $(h_i, 1\leq i\leq l; x_\alpha, \alpha\in\Phi)$ 跟 $(h_i, 1\leq i\leq l, z_\alpha, \alpha\in\Phi)$ 關於 κ 是互為對偶。然而必須注意一件事：不要將 y_α, z_α 的選法跟習慣的選法 x_α, y_α 使得 $[x_\alpha, y_\alpha]=h_\alpha$ 混為一談。在此，我們寧有 $[x_\alpha, z_\alpha]=t_\alpha=[(\alpha,\alpha)/2]h_\alpha$（命題8.3(c)）。

依定義，ad 的 Casimir 元素是 L 的一個自同態定義為 $c_{ad}=\sum_{i=1}^{l} adh_i adk_i+\sum_{\alpha\in\Phi} adx_\alpha adz_\alpha$。這個建構建議讀者考慮元素 $c_L=\sum_{i=1}^{l} h_i k_i+\sum_{\alpha\in\Phi} x_\alpha z_\alpha\in\mathscr{U}(L)$。如果 ad 擴張（唯一地）為結合代數的一個同態 $ad:\mathscr{U}(L)\longrightarrow EndL$，則 adc_L 必是 c_{ad}。為此之故，我們稱 c_L 是 L 的一個泛 Casimir 元素。在（6.2）中的討論證明了對 L 的任何表現 ϕ，$\phi(c_L)$ 與 $\phi(L)$ 是可交換，因此當 ϕ 是既約時，則 $\phi(c_L)$ 的作用就如純量一般。

為了確定當 $\phi\neq 0$ 時 $\phi(c_L)\neq 0$ 這一件事，我們調查 $\phi(c_L)$ 和 Casimir 元素之間究竟有什麼關係。當 L 是單純時，我們容易看出這一點，所以我們先處理這一種情形（參考習題 6.6）。

引理。令 L 為一單純李代數。如果 $f(x,y), g(x,y)$ 是 L 上的非退化，對稱，結合雙線性形式，則有一非零純量 a 使得 $f(x,y)=ag(x,y)\ \forall x,y\in L$。

證明。每一個形式（非退化）都建立一個自然的向量空間同構 $L\longrightarrow L^*$ 將 x 送至 s，其中 $s(y)=f(x,y)$ 或 $g(x,y)$。結合性保證這些確實是 L 模的同構（回憶一下，在（16.1）中如何將 L^* 變成 L 模）。將這兩個映射中的一個跟另一個的逆映射組合起來，因此就得一 L 模同構 $\pi: L\longrightarrow L$。但是 L 是一既約 L 模（L 是單純的），所以由 Schur 引理知 π 是一純量乘法。換句話說，我們有 $0\neq a\in\mathbf{F}$ 使得如果 $f(x,y)=g(z,y)\ \forall y\in L$，則 $z=ax$。

令$\phi: L \longrightarrow gl(V)$是$L$的一個表現，$L$是單純的。如果$\phi(L)=0$，則每一件事都很清楚。否則$\phi$是信實的（因爲$Ker\ \phi$是$L$的一個理想），所以形式$f(x, y)=Tr(\phi(x)\phi(y))$在$L$上是非退化的，同時也是結合的。Killing 形式也有相同的性質，所以它是一非零倍數af（以上的引理）。特別，給定L的一組基底，關於κ的對偶基底是將關於f的對偶基底向乘量以$1/a$而得的。這證明了$\phi(c_L)=(1/a)c_\phi$。換句話說，ϕ的常 Casimir 元素是泛 Casimir 元素的像的非零倍數。

最後令L是半單的。在 (5.2) 中我們觀察到L的相異單理想在κ下是互爲正交的。這使我們能够將以上所取的對偶基底選爲L的各單純分量的對偶基底（關於κ在分量上的限制）的聯集。所以$c_L=c_{L_1}+\cdots\cdots+c_{L_t}(L=L_1\oplus\cdots\cdots\oplus L_t)$，而且如果$\phi$是$L$的一個表現，則每一個$\phi(c_{L_i})$和對應的$c_{\phi_i}(\phi_i=\phi|_{L_i})$是成比例的，其中$\phi_i$（對每一個$i$）是信實的或是自明的。所以雖然$\phi(c_L)$不一定和$c_\phi$成比例但也跟$c_\phi$有很密切的關係。特別，這又證明了$\phi(c_L)$跟$\phi(L)$是可交換的；不僅如此，當$\phi$是既約時，它的作用如一非零純量一般（除非$\phi(L)=0$）。最後的這一個事實在以下的討論裡是不可缺的。

22.2. 權空間上的跡

固定一個既約L模$V=V(\lambda)$, $\lambda\in\Lambda^+$，而且以ϕ表示由它所引出的表現。也固定L關於κ的對偶基底其取法如 (22.1)。在這一小節裏，我們將對V的每一權μ計算$\phi(x_\alpha)\phi(z_\alpha)$在$V_\mu$上的跡。這是有意義的，因爲$\phi(z_\alpha)$將$V_\mu$送至$V_{\mu-\alpha}$而$\phi(x_\alpha)$將$V_{\mu-\alpha}$送回$V_\mu$。

既然我們只要對一個根α進行討論，我們能够利用S_α的表現理論（第七節）。然而，由於基底$(x_\alpha, z_\alpha, t_\alpha)$是非標準的，所以是需

要加以修正的。基底（$x_\alpha, y_\alpha, t_\alpha$）與標準基底（$x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha$）的關係如下：$z_\alpha=[(\alpha,\alpha)/2]y_\alpha, t_\alpha=[(\alpha,\alpha)/2]h_\alpha$。令（$v_0, v_1, \cdots\cdots. v_m$）是在引理7.2 中的公式 (a)—(c) 所用的基底，即屬於最高權m的既約 S_α 模。爲了方便起見，將此基底換成（$w_0, \cdots\cdots, w_m$），其中 $w_i=i![(\alpha,\alpha)^i/2^i]v_i$。利用此代換我們得：

(a′) $t_\alpha\cdot w_i=(m-2i)[(\alpha,\alpha)/2]w_i$;

(b′) $z_\alpha\cdot w_i=w_{i+1}, (w_{m+1}=0)$;

(c′) $x_\alpha\cdot w_i=i(m-i+1)[(\alpha,\alpha)/2]w_{i-1}, (w_{-1}=0)$。

所以：

$$x_\alpha z_\alpha\cdot w_i=(m-i)(i+1)[(\alpha,\alpha)/2]w_i \text{。} \tag{1}$$

現在取V的一個權μ使得$\mu+\alpha$不再是一個權。於是(21.3)告訴我們過μ的α權鏈是由μ, $\mu-\alpha$, ……, $\mu-m\alpha$所組成，其中$m=<\mu,\alpha>$。在以下的整節中，我們固定μ, α, m。S_α 在權空間的和$W=V_\mu+V_{\mu-\alpha}+\cdots\cdots+V_{\mu-m\alpha}$ 上的表現是一些既約表現的直和（Weyl 定理），每一個都牽涉到一個在 σ_α 的作用下保持不變的權鏈。說得更明確些，在這樣的成分中以（$\mu-i\alpha)(h_\alpha$）爲高權的個數記爲 n_i ($0\leq i\leq[m/2]$)，則 $m(\mu-i\alpha)=n_0+\cdots\cdots+n_i$，而且 $n_i=m(\mu-i\alpha)-m(\mu-(i-1)\alpha)$。當$m$是偶數時，我們以圖表說明之。

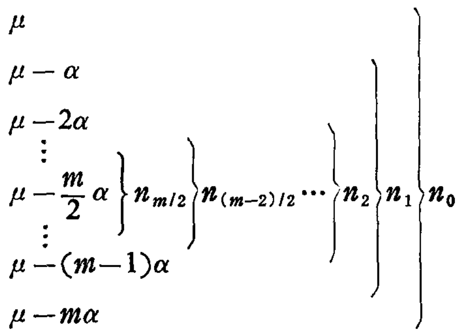


圖 一（m偶數）

對每一固定 k，$0\leq k\leq m/2$，我們要計算 $\phi(x_\alpha)\phi(z_\alpha)$ 在 $V_{\mu-k\alpha}$ 上的跡。令 $0\leq i\leq k$。在W中有屬於最高權 $m-2i=(\mu-i\alpha)(h_\alpha)$ 的一個典型既約 S_α 模，其對應於 $\mu-k\alpha$ 的權空間是由向量 w_{k-i}（用以上的記號）生成的。在公式 (1) 中以 $m-2i$ 代替m，以 $k-i$ 代替 i，我們得:

(2) $$\phi(x_\alpha)\phi(z_\alpha)w_{k-i}=(m-i-k)(k-i+1)[(\alpha,\alpha)/2]w_{k-i}\text{。}$$

在W中有 n_i 個子 S_α 模其所屬的最高權是 $m-2_i$，所以關於一組適當的固有向量基底 $\phi(x_\alpha)\phi(z_\alpha)$（限制在 $V_{\mu-k\alpha}$ 上）的矩陣有 n_i 個成分其形式如 (2)。令 i 取盡由 0 至 k 的所有值，我們得$\phi(x_\alpha)$ $\phi(y_\alpha)$ 的一個對角矩陣其次數爲 $m(\mu-k_\alpha)=n_0+\cdots\cdots+n_k$,而跡爲:

(3) $$\sum_{i=0}^{k}n_i(m-i+1)(k-i+1)(\alpha,\alpha)/2$$

$$=\sum_{i=0}^{k}(m(\mu-i\alpha)-m(\mu-(i-1)\alpha))(m-i-k)$$

$$(k-i+1)(\alpha,\alpha)/2$$

$$=\sum_{i=0}^{k}m(\mu-i\alpha)(m-2i)(\alpha,\alpha)/2\text{。}$$

最後的一個等式成立的理由是因爲 $m(\mu-i\alpha)$ 的係數是 $(\alpha,\alpha)/2$ 乘以 $(m-i-k)(k-i+1)-(m-i-k-1)(k-i)=m-2i$ 之故。（讀者應該檢驗極端的情形 $i=k$。）現在我們回顧而得知 $m/2=(\mu,\alpha)/(\alpha,\alpha)$。所以 (3) 變成:

$$Tr_{V_{\mu-k\alpha}}\phi(x_\alpha)\phi(z_\alpha)=\sum_{i=0}^{k}m(\mu-i\alpha)(\mu-i\alpha,\alpha)$$

這就處理了「梯子」（圖一）的上半部中的權 $\mu-k\alpha$。因爲鏡射 σ_α 將上端與下端互換，我們能够期望相同的結果；特別，$m(\mu-i\alpha)=m(\mu-(m-i)\alpha)$ 其中 $m/2<i\leq m$。對於固定的 k，$m/2<k\leq m$，我們只要模仿上面的討論就行了，因而可得:

$$Tr_{V\mu-k\alpha}\phi(x_\alpha)\phi(z_\alpha)=\sum_{i=0}^{m-k-1}m(\mu-i\alpha)(\mu-i\alpha,\alpha)\text{ 。}$$

（本來左端的和的上限應當是$m-k$，不過$m-k$這一項本就是零。爲什麼?）

不過要注意一下，因爲 $m=2(\mu,\alpha)/(\alpha,\alpha)$，所以對 $m/2<i\leq m$，$(\mu-i\alpha,\alpha)+(\mu-(m-i)\alpha,\alpha)=(2\mu-m\alpha,\alpha)=0$。因此:

(6) $$m(\mu-i\alpha)(\mu-i\alpha,\alpha)+m(\mu-(m-i)\alpha)(\mu-(m-i)\alpha,\alpha)=0\text{ 。}$$

這證明了一件事，那就是我們可以對 (5) 式加上一些分量的對：$k+1$ 與 $m-(k+1)$，$k+2$ 與 $m-(k+2)$，等等（注意，對於 $m=2i$，(6) 使得 $(\mu-i\alpha,\alpha)=0$。）換句話說，對於任意 k (5)可以化成(4)。

最後，如果我們希望考慮V的一個任意權 ν，我們造一過 ν 的 α 鏈而且令最後一項 $\nu+k\alpha$ 扮演以上公式中的 μ 的角色。注意，對一切的 μ，若 $V_\mu=0$ 則 $m(\mu)=0$，就此事實以及一點點變戲法使我們能够對任意 $\mu\in\Pi(\lambda)$ 重寫(4)式如下:

$$Tr_{V_\nu}\phi(x_\alpha)\phi(z_\alpha)=\sum_{i=0}^{\infty}m(\mu+i\alpha)(\mu+i\alpha,\alpha)$$

22.3. Freudenthal 公式

令 ϕ,V 如 (22.2) 中所述的，$dimV>1$。由 (22.1) 得知泛 Casimir 元素 $c_L=\sum_{i=1}^{l}h_ik_i+\sum_{\alpha\in\Phi}x_\alpha z_\alpha$。因爲 ϕ 是既約的，所以 $\phi(c_L)$ 的作用等於是乘以一個非零純量，就說是 c。固定V的一個權 μ。我們想要計算 $Tr_{V_\mu}\phi(c_L)=cm(\mu)$。

首先，$\phi(h_i)$ 在 V_μ 中的作用只是等於乘以一個純量 $\mu(h_i)$，而且 $\phi(k_i)$ 也是一樣。令 $t_\mu\in H$ 滿足 $\mu(h)=\kappa(t_\mu,h)$ $\forall h\in H$（如第

八節）。記 $t_\mu=\sum_i a_i h_i$；於是由定義 $\mu(h_i)=\sum_j a_j\kappa(h_j,h_i)$ 而且 $\mu(k_i)=\sum_j a_j\kappa(h_j,k_i)=a_i$（對偶性）。所以 $(\mu,\mu)=\sum_{i,j} a_i a_j\kappa(h_j,h_i)=\sum_i \mu(h_i)\mu(k_i)$，因此：

$$Tr_{V_\lambda}\phi(h_i)\phi(k_i)=m(\mu)(\mu,\mu)。$$

組合（8）跟（22.2）中的（7)，我們有：

$$cm(\mu)=(\mu,\mu)m(\mu)+\sum_{\alpha\in\Phi}\sum_{i=0}^{\infty}m(\mu+i\alpha)(\mu+i\alpha,\alpha)。\tag{9}$$

注意，$m(\mu)(\mu,\alpha)$ 跟 $m(\mu)(\mu,-\alpha)$ 在上式中是同時出現的（因而相消），所以我們能够省略 $i=0$。

我們主張公式(9) 對任意 $\mu\in\Lambda$，$\mu\notin\Pi(\lambda)$ 還是成立的，在這一情形下，公式變成是：

$$0=\sum_{\alpha\in\Phi}\sum_{i=1}^{\infty}m(\mu+i\alpha,\alpha)。$$

事實上如果 $\mu\notin\Pi(\lambda)$，則對於每一 $\alpha\in\Phi$ 具有形如 $\mu+i\alpha$ 的權（如果有的話）必出現在一個權鏈中，此權鏈所有的 i 或全爲正或全爲負。對於後者來說，關於 α 的分量是 0；對於前者來說，只要利用類似於（22.2）中處理公式（6）的方法也得到相同的結論。

前面的討論事實上證明了一件事，這就是對每一固定的 $\alpha\in\Phi$ 與每一個 $\mu\in\Lambda$，我們有：

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty}m(\mu+i\alpha)(\mu+i\alpha,\alpha)=0。\tag{10}$$

特別，

$$\sum_{i=1}^{\infty}m(\mu-i\alpha)(\mu-i\alpha,-\alpha)=m(\mu)(\mu,\alpha)+\sum_{i=1}^{\infty}m(\mu+i\alpha)(\mu+i\alpha,\alpha)。\tag{11}$$

將(11)代入(9)（和是取自 $i=1$ 如前面所作的註解），我們最後得：

(12) $$cm(\mu)=(\mu,\mu)m(\mu)+\sum_{\alpha\succ 0}m(\mu)(\mu,\alpha)$$

$$+2\sum_{\alpha\succ 0}\sum_{i=1}^{\infty}m(\mu+i\alpha)(\mu+i\alpha,\alpha)。$$

令 $\delta=(1/2)\sum_{\alpha\succ 0}\alpha$ (13. 3)，這可寫成爲:

(13) $$cm(\mu)=(\mu,\mu+2\delta)m(\mu)+2\sum_{\alpha\succ 0}\sum_{i=1}^{\infty}m(\mu+i\alpha)(\mu+i\alpha,\alpha)。$$

此公式的唯一缺點是它還是牽涉到 c。不過有一特別情形，而在此情形下我們能獲知 $m(\mu)$ 的值，即 $m(\lambda)=1$。不僅如此，對於所有的正根 α 及所有的 $i\geq 1$, $m(\lambda+i\alpha)=0$。依此我們能够就 $c=(\lambda,\lambda+2\delta)=(\lambda+\delta,\lambda+\delta)-(\delta,\delta)$ 解 (13) 式。（事實上，直接計算 c 是不很難的: 習題 23. 4）總結這些結果我們得 Freudenthal 公式。

定理 令 $V=V(\lambda)$ 是一個屬於最高權 λ 的既約 L 模，$\lambda\in\Lambda^+$。如果 $\mu\in\Lambda$，則 μ 在 V 中的重複數可以用以下的遞歸公式求出:

(14) $$((\lambda+\delta,\lambda+\delta)-(\mu+\delta,\mu+\delta))m(\mu)=2\sum_{\alpha\succ 0}\sum_{i=1}^{\infty}$$

$$m(\mu+i\alpha)(\mu+i\alpha,\alpha)。$$

我們還必須觀察一件事，那就是 Feudenthal 公式是否提供一個計算重複數的有效方法，以 $m(\lambda)=1$ 爲出發點。由 (13. 4) 的命題 21. 3引理 C 證明了一件事，這就是對於 $\mu\in\Pi(\lambda)$, $\mu\neq\lambda$, $(\lambda+\delta,\lambda+\delta)-(\mu+\delta,\mu+\delta)$ 是不等於 0；所以一旦這個量是等於 0 則 $m(\mu)=0$, $\mu\neq\lambda$。所以如果所有的 $m(\mu+i\alpha)(i\geq 1,\alpha\succ 0)$ 是已知，即所有的 $m(\nu)$, $\mu<\nu<\lambda$，是已知，則 $m(\mu)$ 也就可求出。（以下將舉一些具體的例子。）

在實用上，我們能够把 Freudenthal 公式的用法處理得更有效，其做法是利用一個事實，這就是在 Weyl 羣作用下的共軛權都有相同的重複數（定理 21. 2)。目前有已知的計算機程式可以執行所牽涉到

的計算。注意，因爲 $m(\mu)$ 是以一個商的形式出現，所以內積能够以任何方便的方式加以正規化。

22.4. 範 例

爲了利用 Freudenthal 公式，我們必須能够明確地計算在Λ上的雙線性形式。在上面所用的形式是一個自然的形式（與 Killing 形式是對偶的），但是由上面所做的註解我們知它可以經由任何方便的純量乘法加以正規化。一個常用的辦法是對於Φ的每一既約成分來說，要求所有根的長度的平方爲 1，2，或 3，最小者爲 1。另一個說法就是可以選取第十二節中所用的內積，在那裏我們曾用來建造根系的。

例 1。$L=sl(3,\mathbf{F})$, $\Phi=\{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \pm(\alpha_1+\alpha_2)\}$, $\Delta=\{\alpha_1, \alpha_2\}$, $\alpha_1=2\lambda_1-\lambda_2$, $\alpha_2=-\lambda_1+2\lambda_2$, $\lambda_1=(1/3)(2\alpha_1+\alpha_2)$, $\lambda_2=(1/3)(\alpha_1+2\alpha_2)$，我們要求 $(\alpha_i,\alpha_i)=1$，所以 $(\alpha_1,\alpha_2)=-1/2$, $(\lambda_i,\lambda_i)=1/3$，而且 $(\lambda_1,\lambda_2)=1/6$。置 $\lambda=\lambda_1+3\lambda_2$ 則由 Freudenthal 公式得表一的重複數表。爲了讀者的方便我們也列了其他的資料。權是依「水平」排列：$m(\mu)$ 的計算只需要一些來自高水平的資料。讀者應當依 (21.3) 的圖一的方式畫一權圖。

表 一

μ	$m(\mu)$	$(\mu+\delta,\mu+\delta)$	$\mu=m_1\lambda_1+m_2\lambda_2$
λ	1	28/3	$\lambda_1+3\lambda_2$
$\lambda-\alpha_1$	1	25/3	$-\lambda_1+4\lambda_2$
$\lambda-\alpha_2$	1	19/3	$2\lambda_1+\lambda_2$
$\lambda-\alpha_1-\alpha_2$	2	13/3	$2\lambda_2$
$\lambda-2\alpha_2$	1	16/3	$3\lambda_1-\lambda_2$

$\lambda-\alpha_1-2\alpha_2$	2	7/3	λ_1
$\lambda-2\alpha_1-\alpha_2$	1	13/3	$-2\lambda_1+3\lambda_2$
$\lambda-3\alpha_2$	1	19/3	$4\lambda_1-3\lambda_2$
$\lambda-2\alpha_1-2\alpha_2$	2	4/3	$-\lambda_1+\lambda_2$
$\lambda-\alpha_1-3\alpha_2$	2	7/3	$2\lambda_1-2\lambda_2$
$\lambda-\alpha_1-4\alpha_2$	1	13/3	$3\lambda_1-4\lambda_2$
$\lambda-2\alpha_1-3\alpha_2$	2	1/3	$-\lambda_2$
$\lambda-3\alpha_1-2\alpha_2$	1	7/3	$-3\lambda_1+2\lambda_2$
$\lambda-2\alpha_1-4\alpha_2$	1	4/3	$\lambda_1-3\lambda_2$
$\lambda-3\alpha_1 3\alpha_2$	2	1/3	$-2\lambda_1$
$\lambda-3\alpha_1-4\alpha_2$	1	1/3	$-\lambda_1-2\lambda_2$
$\lambda-4\alpha_1-3\alpha_2$	1	7/3	$-4\lambda_1+\lambda_2$
$\lambda-4\alpha_1-4\alpha_2$	1	4/3	$-3\lambda_1-\lambda_2$

表　二

	00	10	01	20	11	30	02	21	40	12	31	50	03	22
00	1													
10	1	1												
01	2	1	1											
20	3	2	1	1										
11	4	4	2	2	1									
30	5	4	3	2	1	1								
02	5	3	3	2	1	1	1							
21	9	8	6	5	3	2	1	1						
40	8	7	5	5	3	2	1	1	1					
12	10	10	7	7	5	3	2	2	1	1				
31	16	14	12	10	7	6	4	3	2	1	1			
50	12	11	9	8	6	5	3	3	2	1	1	1		
03	9	7	7	5	4	4	3	2	1	1	1	0	1	
22	21	19	16	15	11	9	7	6	4	3	2	1	1	1

例2。令L是 G_2 型的單代數。L的根系已在(12.1)中明確地造出來。回憶一下，我們知道 α_1 是一個短根而 α_2 是一個長根，所以 $\lambda_1=2\alpha_1+\alpha_2$.，$\lambda_2=3\alpha_1+2\alpha_2$。在表二中我們列下一些由 Fveudenthal 公式所得的資料。我們將權 $m_1\lambda_1+m_2\lambda_2$ 縮寫成 m_1m_2。以最高權λ爲列標，以制囿權μ爲行標，λ列與μ行的相交項是整數 $m_\lambda(\mu)$（如果不爲0）。讀者應當自己親自驗證表中的一些資料。

22.5. 形式特徵標

如前，令$\Lambda\subset H^*$爲整線性函數的格子。如果$V=V(\lambda)$，$\lambda\in\Lambda^+$，我們要考慮權$\mu\in\Pi(\lambda)$的一個形式和，在此和中每一 μ 出現 $m(\mu)$ 次。然而由於「$\mu+\nu$」在Λ中已有具體的意義，所以將它用在這樣的形式和中是一個不良的記號。所以我們介紹Λ佈於$\mathbf{Z}$上的羣環，記爲 $\mathbf{Z}[\Lambda]$。依定義，$\mathbf{Z}[\Lambda]$ 是一個自由 $\mathbf{Z}$ 模，以 $e(\lambda)$ 爲其基底而此基底與Λ的元素之間是一一對應，又其加法記爲 $e(\lambda)+e(\mu)$ 。如果我們定義 $e(\lambda)e(\mu)=e(\lambda+\mu)$而且加以線性擴張之後，$\mathbf{Z}[\Lambda]$ 變成是一可換環。（存在一個么元：$e(0)$）$\mathscr{W}$在 $\mathbf{Z}[\Lambda]$ 上的作用是很自然的，其方式爲 $\sigma e(\lambda)=e(\sigma\lambda)$。

現在定義 $V(\lambda)$ 的形式特徵標 $ch_{V(\lambda)}$ 或 ch_λ 爲 $\mathbf{Z}[\Lambda]$ 的元素 $\sum_{\mu\in\pi(\lambda)} m_\lambda(\mu)e(\mu)$ 就很有意義了。（因爲一旦$\mu\notin\pi(\lambda)$，則 $m_\lambda(\mu)=0$ 所以我們甚至能將和擴張至所有的$\mu\in\Lambda$）例如，如果$L=sl(2,\mathbf{F})$，$V(\lambda)$ 的形式特徵標定義爲 $ch_\lambda=e(\lambda)+e(\lambda-\alpha)+e(\lambda-2\alpha)+\cdots\cdots+e(\lambda-m\alpha)$，$m=\langle\lambda,\alpha\rangle$。更一般的，如果$V$是一個任意有限維$L$模，則由 Weyl 定理與分類定理我們有一實質上是唯一的分解 $V=V(\lambda_1)\oplus\cdots\cdots\oplus V(\lambda_t)$，$\lambda_i\in\Lambda^+$。所以 $ch_V=\sum_{i=1}^{t} ch_{\lambda_i}$ 可以稱爲V 的形式特徵標。注意，因爲$\sigma\in\mathscr{W}$ 對 V 的每一既約分量的權空間有排列作用（

定理 21.2) 所以 σ 固定 ch_V。

由以下的結果，我們知道只要對 ch_V 有足够的認識就能使我們重獲 V 的既約成分。

命題 A　令 $f=\sum_{\lambda\in >}c(\lambda)e(\lambda), c(\lambda)\in\mathbf{Z}$，是被 $\mathscr{W}$ 所有的元素所固定。則 f 能够以一個且僅有一個方式寫成 ch_λ ($\lambda\in\Lambda^+$) 的一個 $\mathbf{Z}$ 線性組合

證明　顯然 $f=\sum_{\lambda\in\Lambda+}c(\lambda)(\sum_{\sigma\in W}e(\sigma\lambda))$。對於 $\lambda\in\Lambda^+$ 而且 $c(\lambda)\neq 0$ 來說，所有的制囿權 $\mu<\lambda$ 的集合是有限的 ((13.2) 的引理 B)。令 M_f 是這樣的 μ (對所有這樣的 λ) 的全體，所以 M_f 是有限的。令 $\lambda\in\Lambda^+$ 是集合 $\{\lambda\in\Lambda^+|c(\lambda)\neq 0\}$ 的極大元素，而且置 $f'=f-c(\lambda)ch_\lambda$ 所以 f' 顯然又滿足命題的假設。我們知道在 ch_λ 中的制囿權 μ 都會滿足 $\mu<\lambda$，所以他們都落在 M_f 中。這就證明了 $M_{f'}\subsetneq M_f$。(因爲 $\lambda\notin M_{f'}$。) 對 $Card(M_f)$ 作歸納，我們能够將 f' 寫成所希望的形式；於是 f 也可以寫成所希望的形式。就歸納法的第一個步驟來說，我們注意到 $Card(M_f)=1$ 的情形是自明的：在此情形下，一個極小制囿權 λ 是 f 中僅有的制囿權，所以 $f=c(\lambda)ch_\lambda$ 其中 $ch_\lambda=\sum_{\sigma\in W}e(\sigma\lambda)$。唯一性的主張留給讀者自證之 (習題 8)。

其次，我們指出形式特徵標的一個優點是任意兩個形式特徵標可以相乘。

命題 B　令 V,W 爲 (有限維的) L 模。則 $ch_{V\times W}=ch_V\cdot ch_W$。

證明　一方面，由 L 在 $V\otimes W$ 上所定義的作用方式 (6.1) 可以顯然地看出 $V\otimes W$ 的權正好是那些形如 $\lambda+\mu$ (λ，μ 分別是 V 及 W 的權) 的權，每一個權出現的重複數是

$$\sum_{\pi+\pi'=\lambda+\mu}m_V(\pi)m_W(\pi')$$

(參考習題 21.7)。然而當我們將 ch_V 乘以 ch_W 時也正好得到上面的結果。

習 題

1. 令 $\lambda\in\Lambda^+$。試證在不利用 Freudethal 公式下，對 $\alpha\in\Delta$ 及 $0\leq k\leq<\lambda,\alpha>$, 恆有 $m_\lambda(\lambda-k\alpha)=1$。

2. 試證 c_L 是在 $\mathscr{U}(L)$ 的中心裏(參考 (23.2))。〔模仿 (6.2) 中的計算，省略 ϕ。〕又試證 c_L 與 L 的基底的選擇是無關。

3. 在例 1 中，試決定權 $\mathscr{W}$ 軌道，因而直接證明 $\mathscr{W}$ 共軛權有相同的重複數(參考定理 21.2)。〔參考習題 13.12。〕

4. 試驗證 (21.3) 的圖一中的重複數。

5. 試利用 Freudental 公式及例 1 中 A_2 的資料 (22.4) 計算 $V(\lambda)$, $\lambda=2\lambda_1+2\lambda_2$，的重複數。特別，試證 $dimV(\lambda)=27$ 及權 0 出現的重複數是 3。試畫權圖。

6. 對於 G_2 型的 L 試利用 (22.4) 的表二決定 $V(\lambda)$. $\lambda=\lambda_1+2\lambda_2$，的一切權以及他們的重複數。試計算 $dimV(\lambda)=286$〔參考習題 13.12。〕

7. 令 $L=sl(2,\mathbf{F})$ 而且將 $m\lambda$ 與整數 m 認同。試利用 (22.5) 的命題 A 跟 B 以及定理 7.2 導出 Clebsch-Gordan 公式：如果 $n\leq m$，則 $V(m)\otimes V(n)\simeq V(m+n)\oplus V(m+n-2)\oplus\cdots\cdots\oplus V(m-n)$，全部有 $n+1$ 個和分量。(參考習題 7.6。)

8. 試證命題 22.5A 的唯一性主張。

附 註

Freudenthal 公式的證明是取自 Jacobson〔1〕; 也可參考 Freudenthal〔1〕跟 Freudenthal-de Vries〔1〕。至於有關計算方面可參考 Agrawata〔1〕,

Beck, Kolman〔1〕, Krusemeyer〔1〕, Burgoyne, Williamson〔1〕。在 Freudenthal〔1〕的第二部分中，對於 E_8 的情形有很詳細的說明。表二的資料是取自 Springer〔1〕。

23. 特徵標

我們的目標是要證明 Harish-Chandra 的一個關於特徵標的定理，這裏所述的特徵標是與無限維模 $Z(\lambda)$, $\lambda\in H^*$(20.3) 相關聯。這個定理將在第二十四節中用到。在那裏我們將得到一個 Weyl 的古典結果（關於有限維模的特徵標）的一個簡單的代數證明。做爲一個預備工作（它也是不相關的興趣）我們將在 (23.1) 中證明 Chevalley 關於「提昇」不變量的一個定理。這當中沒有一個是跟 Frendenthal 公式 (22.3) 相關的。

23.1 不變的多項式函數

如果V是有限維向量空間，對稱代數 $\mathfrak{S}(V^*)$（參考 17.1）是稱爲V上的多項式函數的代數，而且是記爲 $\mathscr{P}(V)$。如果 $(f_1, \cdots\cdots, f_n)$ 是 V^* 的一組固定基底，則 $\mathscr{P}(V)$ 可與n個變數 $f_1, \cdots\cdots, f_n$ 的多項式代數認同。在這一小節中我們考慮 $\mathscr{P}(L)$ 跟 $\mathscr{P}(H)$。

因爲權格子Λ衍生 H^*，所以以 $\lambda\in\Lambda$ 爲變數的多項式衍生 $\mathscr{P}(H)$。由極化過程（習題 5）純冪 λ^k $(\lambda\in\Lambda, k\in Z^+)$已足够衍生 $\mathscr{P}(H)$。現在考慮 $\mathscr{W}$，它作用在 H^*上因而也作用在 $\mathscr{P}(H)$上。令 $\mathscr{P}(H)^W$是由那些被$\mathscr{W}$所固定的多項式函數所組成的一個子代數；這是 H 上 $\mathscr{W}$ 不變多項式函數的代數。（譬如，設 $L=sl(2,\mathrm{F})$, $\lambda=$基本制囿權，則 $\mathscr{P}(H)^W$ 是由 λ^2 所衍生的代數它具有 1 。）如果我們以 $Sym f$ 表示 $f\in\mathscr{P}(H)$ 的一切相異的$\mathscr{W}$共軛元的和，則所有的 $Sym\lambda^k(\lambda\in\Lambda^+, k\in Z^+)$ 衍生 $\mathscr{P}(H)^W$ 是顯然的一件事，這是因爲每

一$\lambda\in\Lambda$是一個制囿整線性函數的$\mathscr{W}$共軛（引理 13.2A）。

其次令$G=IntL$ 它是由一切的 $expadx$（x冪零）所衍生。則G在$\mathscr{P}(L)$上有自然的作用，其作用方式是 $(\sigma f)(x)=f(\sigma^{-1}x)(\sigma\in G, f\in\mathscr{P}(L))$，而且我們記 $\mathscr{P}(L)$ 的固定元素集為 $\mathscr{P}(L)^G$。這些是L上的G不變多項式函數。

藉表現理論我們能够造成許多G不變函多項式函數的例子如下。令$\phi: L\longrightarrow gl(V)$是$L$的一個旣約(有限維)表現，其所屬的最高權是$\lambda\in\Lambda^+$ 而且令 $z\in N=\coprod_{\alpha\succ 0}L_\alpha$，$\sigma=expadz$。定義一個新的表現$\phi^\sigma$: $L\longrightarrow gl(V)$ 如下: $\phi^\sigma(x)=\phi(\sigma(x))$, $x\in L$。(試驗證這個新表現確實滿足 $\phi^\sigma([xy])=[\phi^\sigma x,\phi^\sigma y]$。) 顯然$\phi^\sigma$ 也是旣約的。如果 $v^+\in V$是一極大向量，而β是任何正根，則$\phi^\sigma(x_\beta)(v^+)=\phi(1+adz+\frac{(adz)^2}{2!}+\cdots\cdots)(x_\beta))(v^+)=0$，這這是因為括弧內的元素還是落在$N$中之故。不僅如此，因為 $[zh]\in N$而且 $\phi(N)(v^+)=0$ 所以 $\phi^\sigma(h)(v^+)=\phi(h+[zh])(v^+)=\phi(h)(v^+)=\lambda(h)v^+$。換句話說，$v^+$ 還是新表現的一個極大向量而且其所屬的權是λ，所以兩個表現ϕ跟 ϕ^σ 是等價的（即V的兩個L模結構是同構的。(20.3)）。令 $\psi_\sigma: V\longrightarrow V$為一個$L$模同構，使得 $\psi_\sigma(\phi(x)(v))=\phi^\sigma(x)(\psi_\sigma(v))$ 對一切的$v\in V$成立。更具體地說，ψ_σ 只是V中基底的一個變換，而且這等式說明了$\phi(x)$ 跟 $\phi^\sigma(x)=\phi(\sigma x)$ 的矩陣是相似的。特別，他們有相同的跡。如果$k\in\mathbf{Z}^+$ 則得知函數$x\longrightarrow Tr(\phi(x)^k)$ 是σ不變的。但這是一個多項式函數: 以 $\phi(x)$ 的（線性）坐標函數開始，$\phi(x)^k$ 的成分變成是這些的多項式，而跡是這樣的多項式的一個線性組合。也請注意一下，跡函數的不變性是與基底（或正根）的原來選擇無關，甚而與H的選擇也無關，所以 $x\longrightarrow Tr(\phi(x)^k)$ 是被 G所有的生成元所固定（參考習題 16.2），因此是被G所固定。

現在我們已可以比較 $\mathscr{P}(L)^G$ 與 $\mathscr{P}(H)^W$（這是整個討論的主要觀點）。在L上的任何多項式函數，如限制在H上，則是H上的一個多項式函數：如果我們將H的一組基底擴張成L的一組基底而且將f寫成爲對偶基底元素的一個多項式，這就變得很明顯。如果f正好是G不變的，則它就被每一個造法如(14.3)的內自同構 τ_α $(\alpha\in\Phi)$ 所固定。但是 $\tau_\alpha|_H$ 正是鏡射 σ_α 而且 σ_α 衍生$\mathscr{W}$所以我們看出 $f|_H\in\mathscr{P}(H)^W$。因此我們就得到一個代數同態 $\theta:\mathscr{P}(L)^G\longrightarrow\mathscr{P}(H)^W$。

定理（**Chevalley**）θ是一個蓋射。

證明（**Steinberg**）。由前面的註解，我們知道只要證明每一個 $Sym\lambda^k(\lambda\in\Lambda^+,k\in\mathbf{Z}^+)$ 都落在θ的像集中就可以了。爲此之故，我們對 Λ^+ 的偏序施以向上的歸納法，以極小的 λ（可能是 0）爲出發點。（回憶引理 13.2B，我們知道在一已知制囿權之下的所有制囿權只有有限多個。）因爲λ是極小之故，所以沒有其他的 $\mu\in\Lambda^+$ 能够成爲表現 ϕ（其所屬的最高權是 λ）的權。由定理 20.2, 21.2, ϕ僅有的權是 λ 的$\mathscr{W}$共軛，每一個的重複數都是 1。現在 $x\longrightarrow Tr(\phi(x)^k)$ 是一個G不變多項式函數f，它在H上的限制是 $Sym\lambda^k$。所以 $Sym\lambda^k=\theta(f)$。

爲了歸納法中所需的步驟，固定 $\lambda\in\Lambda^+$, $k\in\mathbf{Z}^+$。再令ϕ表示最高權爲λ的旣約表現，f是函數 $x\longrightarrow Tr(\phi(x)^k)$。則 $f|_H=Sym\lambda^k+\sum m_\lambda(\mu)Sym\mu^k$（定理 21.2），其中我們取和於 $\mu\precneqq\lambda$ 之上，$\mu\in\Lambda^+$。依歸納法假設，包含 $\mu\precneqq\lambda$ 諸項都可提昇至 $\mathscr{P}(L)^G$ 上，所以最後 $Sym\lambda^k$ 也是可提昇的。

讓我們再對 $\mathscr{P}(L)^G$ 做進一步的一個觀察。稱上面的多項式函數 $x\longrightarrow Tr(\phi(x)^k)$ 爲一個跡多項式。如果$x=x_s+x_n$ 是x的一個 Jordan 分解，則 $\phi(x)=\phi(x_s)+\phi(x_n)$ 是 $\phi(x)$ 的（一般）Jordan 分解（參考(6.4)）。因爲 $\phi(x_s)$ 跟 $\phi(x_n)$ 是可交換的，所以在 $(\phi(x_s)+$

$\phi(x_n))^k$ 的展開式中除了 $\phi(x)$ 以外的項都是冪零的，因而是 0 跡。所以一個跡多項式是完全由它在 L 的半單元素上的值來決定的。Chevalley定理的證明事實上是證明 θ 將由跡多項式所衍生的子代數 $\mathscr{T}\subset\mathscr{P}(L)^G$ 映上 $\mathscr{P}(H)^W$。事實上，$\theta\,|\,\mathscr{T}$ 既是一個嵌射也是一個蓋射：$\theta(f)=0$ 的意思是 $f|_H=0$。L 的每一個半單元素是落在某一極大的環面子代數中，因此（16.4）在 G 的作用下與 H 的一個元素是共軛的。所以 f 在 L 所有的半單元素上取 0 值而使得 $f=0$（由以上的註釋）。

利用一些基本的代數幾何（參考以下的附錄），我們能直接證明 θ 是一個嵌射；看成一個系理，$\mathscr{P}(L)^G$ 是由跡多項式所衍生的。（然而我們將不需要這些結果。）在（23.3）中我們將允許我們用 θ^{-1} 的記號，但讀者能够很快地驗出我們的討論實質上是與 θ 的嵌射性質無關的。

23.2. 標準循環模與特徵標

令 $\mathfrak{Z}$ 是 $\mathscr{U}(L)$ 的中心，即 在 $\mathscr{U}(L)$ 中與所有的 $x\in\mathscr{U}(L)$，或者說所有的 $x\in L$，可以交換的元素的集合。一個自同構 $\sigma: L\longrightarrow L$ 可以唯一地擴張成 $\mathscr{U}(L)$ 的一個自同構，所以 $G=Int\,L$ 會作用於 $\mathscr{U}(L)$ 上而把 $\mathfrak{Z}$ 映至 $\mathfrak{Z}$。以下的事實將在（23.3）用到。

引理 A. $\mathfrak{Z}$ 恰恰好是 $\mathscr{U}(L)$ 中的 G 不變元素的集合。

證明 一方面，$\mathfrak{Z}$ 是與所有的冪零元 $x\in L$ 可以交換，所以 $0=[xz]=ad\,x(z)(z\in\mathfrak{Z})$，而且 $exp\,ad\,x(z)=z$。這使得一切的 $\sigma\in G$ 會固定 z。反之，令 G 固定 $\mathscr{U}(L)$ 的一個元素 x。固定一個根 $\alpha\in\Phi$ 而且取 $0\neq x_\alpha\in L_\alpha$。如果 $n=ad\,x_\alpha$，假定 $n^t\neq 0$ 而 $n^{t+1}=0$ 於是選取 $t+1$ 個相異純量 $a_1,\cdots\cdots,a_{t+1}\in\mathbf{F}$（這是可能的因爲 $\mathbf{F}$ 是無窮之故）。由假設，$1+a_in(a_i^2/2!)n^2+\cdots\cdots+(a_i^t/t!)n^t$ 固定 x $(1\leq i\leq t+1)$ 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2/2! & \cdots\cdots & a_1^t/t! \\ \vdots \\ 1 & a_{t+1} & a_{t+1}^2/2! & \cdots\cdots & a_{t+1}^t/t! \end{vmatrix}$$

是 $(2!3!\cdots\cdots t!)^{-1}$ 乘上 Vandermonde 行列式 $\prod_{i<j}(a_i-a_j)\neq 0$ 所以我們能够求得純量 $b_1,\cdots\cdots,b_{t+1}$（不全爲 0）滿足：$n=\sum_{i=1}^{t+1}b_i(\exp a_i n)$。（嚴格地說，在由 x 所衍生的有限維子 L 模 $\subset\mathscr{U}(L)$ 的自同態的空間裏這已證明完畢，參考習題 17.3。）特別，$\operatorname{ad}x_\alpha(x)=\sum b_i\exp(\operatorname{ad}a_i x_\alpha)(x)=(\sum b_i)x$ 因爲 $\operatorname{ad}x_\alpha$ 是冪零的，我們得一結論那就是 $\sum b_i=0,[x_\alpha,x]=0$。但是諸 x_α 衍生 L，所以 x 與 L 所有的元素可以交換因而 $x\in\mathfrak{Z}$ 正如所求。

我們做一個註解，以前所提到的泛 Casimir 元 $C_L(22.1)$ 就屬於 $\mathfrak{Z}$：只要模仿 (6.2) 中的計算，並且省略在那裏所提到的 ϕ 就得證。

其次，我們想知道 $\mathfrak{Z}$ 在無限維模 $Z(\lambda)$ 上，$\lambda\in H^*$，有如何的作用？這裏的 $Z(\lambda)$ 就是 (20.3) 中所造的。如果 v^+ 是 $Z(\lambda)$ 的一個極大向量而且 $z\in\mathfrak{Z}$，注意 $hzv^+=z.h.v^+=\lambda(h)z.v^+(h\in H)$，然而 $x_\alpha\cdot z\cdot v^+=zx_\alpha v^+=0(x_\alpha\in L_\alpha,\alpha\succ 0)$。所以 $z.v^+$ 是另一個極大向量其所屬的權爲 λ；依定理 20.2, $z.v^+$ 必是 v^+ 的一個純量倍數，就說它是 $\chi_\lambda(z)v^+$。故所得的函數 $\chi_\lambda:\mathfrak{Z}\longrightarrow\mathbf{F}$ 是一個 $\mathbf{F}$ 代數的同態，稱爲由 λ 所決定的特徵標。

令 $S=\{v\in Z(\lambda)\mid zv=\chi_\lambda(z)\cdot v\ \ \forall z\in\mathfrak{Z}\}$。則 S 在 $\mathscr{U}(L)$ 的作用下保持不變而且 S 包含 v^+，因此 $S=Z(\lambda)$。所以 $z\in\mathfrak{Z}$ 在 $Z(\lambda)$ 的任何子模上的作用是和乘一個純量 $\chi_\lambda(z)$ 一樣（同理，在 $Z(\lambda)$ 的任何同態像上的作用也是一樣）。

我們發現並不是所有的特徵標 $\chi_\lambda(\lambda\in H^*)$ 都是相異的。爲了想得到一個判定兩特徵標會是相等的正確條件，我們定義 $\lambda,\mu\in H^*$ 是連接的（記爲 $\lambda\sim\mu$）當且僅當 $\lambda+\delta$ 跟 $\mu+\delta$ 是 $\mathscr{W}$ 共軛的（其中

δ =正根的和的一半，如 (13.3)。顯然，這樣的連接關係是一個等價關係。在此，我們只考慮整線性函數（卽 Λ 的元素）。選取$x_\alpha \in L_\alpha(\alpha \succ 0)$, $y_\alpha \in L_{-\alpha}$ 使得 $[x_\alpha y_\alpha]=h_\alpha$

命題 令 $\lambda \in \Lambda$, $\alpha \in \Delta$。如果整數 $m=\langle\lambda,\alpha\rangle$ 是非負的，則 y_α^{m+1} 在 $Z(\alpha)$ 中的陪集是一極大向量其所屬的權是 $\lambda-(m+1)\alpha$。

證明 利用引理 21.2 的公式以及一個事實那就是 $h_\alpha-\langle\lambda,\alpha\rangle\cdot 1 \in I(\lambda)(20.3)$ 就行了。

系 1 令 $\lambda \in \Lambda$, $\alpha \in \Delta$, $\mu=\sigma_\alpha(\lambda+\delta)-\delta$。則 $\chi_\lambda=\chi_\mu$

證明 因爲 σ_α 對 α 以外的正根有排列作用而且將 α 送至 $-\alpha$（引理 10.2B），所以 $\sigma_\alpha\delta-\delta=-\alpha$。所以 $\mu=\sigma_\alpha(\lambda+\delta)-\delta=\sigma_\alpha\lambda-\alpha=\lambda-(\langle\lambda,\alpha\rangle+1)\alpha$。由假設，$\langle\lambda,\alpha\rangle \in Z$ 如果此數是非負的，則命題證明 $Z(\lambda)$ 包含 $Z(\mu)$ 的一個同態像（不爲 0），因此由前面的註解知 $\chi_\lambda=\chi_\mu$。如果 $\langle\lambda,\mu\rangle$ 是負的，則 $\langle\mu,\alpha\rangle=\langle\lambda,\alpha\rangle-2(\langle\lambda,\alpha\rangle+1)=-\langle\lambda,\alpha\rangle-2$ 是非負的（除非 $\langle\lambda,\alpha\rangle=-1$，而在此情形下 $\mu=\lambda$ 所以沒什麼要證明的）。所以命題及可以應用，以 μ 代替 λ，又得 $\chi_\lambda=\chi_\mu$。

系理證明兩個整線性函數如能以一單鏡射連接則有相同的特徵標。利用連接的遞移性及$\mathscr{W}$是由諸單鏡射所衍生的事實（定理 10.3 (d)），我們得一更強的結果。

系 2 令 λ, $\mu \in \Lambda$。如果 $\lambda \sim \mu$，則 $\chi_\lambda=\chi_\mu$。

這是 Harish-Chandra 定理中容易的一半（參考 (23.3)）。在以下我們將看到我們是如何地推廣這結果而使其涵蓋所有的 λ，$\mu \in H^*$，不過在此書中，我們只需要整數的情形。

23.3. Harish-Chandra 定理

定理 (Harish-Chandra)。令 λ，$\mu \in H^*$。如果 $\chi_\lambda=\chi_\mu$，則 $\lambda \sim$

μ。

這一小節是用來證明這定理。證明的主要想法並不是很難的，不過有一些映射是要弄淸楚的。首先我們固定L的一組方便的基底，就說是 $\{h_i, 1\leq i\leq l; x_\alpha, y_\alpha, \alpha\succ 0\}$，其中 $h_i=h_{\alpha_i}$, $\Delta=\{\alpha_1,\cdots\cdots,\alpha_l\}$。定一個次序，先是 y_α，其次是 h_i，最後是 x_α。關於這個次序建構 $\mathscr{U}(L)$ 及 $\mathscr{U}(H)$ 的 PBW 基底。定義一個線性映射 $\xi:\mathscr{U}(L)\longrightarrow\mathscr{U}(H)$ 將 $h_1, h_2, \cdots\cdots, h_l$ 的基底單項式送至其本身而將其他的基底元素送至 0。

如果 v^+ 是旣約模 $V(\lambda)$, $\lambda\in H^*$, 的一個極大向量，我們考慮 $z\in\mathfrak{Z}$（用以上的 PBW 基底表示）是如何的作用於 v^+ 上。單項式 $\prod_{\alpha\succ 0} y_\alpha^{i_\alpha}\prod_i h_i^{k_i}\prod_{\alpha\succ 0} x_\alpha^{j_\alpha}$ 若其中有一些 $j_\alpha>0$ 則將 v^+ 送至 0，然而若一切的 $j_\alpha=0$ 而有一些 $i_\alpha>0$ 則先將 v^+ 送至它的一個倍數然後再送至一個較低權的向量。依此，能够對固有值 $\chi_\lambda(z)$ 有所貢獻的僅有單項式是那些 $i_\alpha=0=j_\alpha$ $\forall\alpha$。由此，我們立刻知道

$$(*)\qquad \chi_\lambda(z)=\lambda(\xi(z)),\ z\in\mathfrak{Z},$$

其中 ξ 如上所定義的。（$\lambda:H\longrightarrow\mathbf{F}$ 可以自然地擴張成結合代數的同態 $\mathscr{U}(H)\longrightarrow\mathbf{F}$。）注意，由（*）我們知道$\xi$在$\mathfrak{Z}$的限制是一個代數同態。

不論如何，δ必須出現在這討論裏，其經過的情形如下。將每一個h_i 送至 h_i-1，並且線性地擴張成一個映射$H\longrightarrow\mathscr{U}(H)$。這是一個李代數同態(所有的李乘積都是 0)，所以它擴張成一個同態 $\eta:\mathscr{U}(H)\longrightarrow\mathscr{U}(H)$。$\eta$顯然是一個自同構（其逆映射是將 h_i 送至 h_i+1）。令ϕ: $\mathfrak{Z}\longrightarrow\mathscr{U}(H)$是合成同態$\eta\circ\xi|_{\mathfrak{Z}}$。複習 (13.3) 知 $\delta=\sum_{i=1}^{l}\lambda_i$（$\lambda_i$ 是Λ的基本限制權），所以 $\delta(h_i)=1$。故得 $(\lambda+\delta)(h_i-1)=(\lambda+\delta)(h_i)-(\lambda+\delta)(1)=(\lambda(h_i)+1)-1=\lambda(h_i)$。所以:

(**)　　$(\lambda+\delta)(\psi(z))=\lambda(\xi(z))$ $(z\in\mathfrak{Z},\lambda\in H^*)$。

與 (*) 組合起來，就得 $\chi_\lambda(z)=(\lambda+\delta)(\psi(z))$。現在令 λ 是整線性函數。由(23.2) 的引理 2，所有的共軛 $\sigma(\lambda+\delta)$ 在 $\psi(z)$ 上是一致的。這對所有的 $\lambda\in\Lambda$，因此對所有的 $\mu\in\Lambda$ 是成立的，故得知所有的線性函數在 $\psi(z)$ 所有的 $\mathscr{W}$ 一共軛上取相同的值。不過這一來，$\mathscr{W}$ 必須固定 $\psi(z)$, $z\in\mathscr{Z}$。因為H是可交換的（例 17.2)，所以我們在此可以以對稱代數 $\mathfrak{S}(H)$ 代替 $\mathscr{U}(H)$。所以我們的結論是ψ把 $\mathfrak{Z}$ 映入 $\mathfrak{S}(H)^W$($\mathfrak{S}(H)$ 的元素是被$\mathscr{W}$所有固定)。

我們已證明了一件事，那就是對所有的 $\lambda\in H^*$, $\chi_\lambda(z)=(\lambda+\delta)(\psi(z))$, $\forall z\in\mathfrak{Z}$。不僅如此，$\psi(z)$ 是 $\mathscr{W}$ 不變的，所以如果我們以 $\sigma(\lambda+\delta)$ 替換 $\lambda+\delta$ 則右端是不改變的。所以，如果 $\lambda\sim\mu$（μ 跟 λ 經 σ 連接），則 $\chi_\lambda(z)=\chi_\mu(z)$。這證明了 (23.2) 中的系 2 可以擴大至所有的 λ, $\mu\in H^*$，正如那兒所做的註解。

我們剛看到 $\chi_\lambda(z)=(\lambda+\delta)(\psi(z))$, $\lambda\in H^*$。假定 $\chi_\lambda=\chi_\mu$。則 $\lambda+\delta$ 跟 $\mu+\delta$ 在 $\psi(\mathfrak{Z})$ 上是一致的，$\psi(\mathfrak{Z})$ 是落在 $\mathfrak{S}(H)^{\mathscr{W}}$ 中。為了證明 Harish-Chanpra 定理，我們必須證明在$\mathscr{W}$的作用下，$\lambda+\delta$ 跟 $\mu+\delta$ 是共軛的。為此之故，只要證明 $\psi(\mathfrak{Z})=\mathfrak{S}(H)^W$ 就可以了，這可由以下的引理看出來。

引理　令 $\lambda_1,\lambda_2\in H^*$ 是落在相異的 $\mathscr{W}$ 軌道裏。於是 λ_1,λ_2 在 $\mathfrak{S}(H)^W(=\mathscr{P}(H^*)^W)$ 的某一元素上取相異的值。

證明　這是相當基本的，只需要 $\mathscr{W}$ 的有限性就可以了。一開始在 $\mathfrak{S}(H)$ 中選取一個元素使得 λ_1 在此元素取非零值，而 λ_1 的其他所有的$\mathscr{W}$共軛以及 λ_2 所有的$\mathscr{W}$共軛在此元素上取 0 值。（這樣的多項式是會存在的，為什麼？）將此多項式的像加起來就得 $\mathfrak{S}(H)^{\mathscr{W}}$ 的一個元素，在此元素上，λ_2 取 0 值而 λ_1 取非 0 值。

其餘的工作是證明 ψ 將 $\mathfrak{Z}$ 映上 $\mathfrak{S}(H)^W$。我們還需要介紹另一個

映射。我們回憶一下，$\mathfrak{S}(L)$ 可與$\mathscr{T}(L)$中的對稱張量的空間認同，此空間是自然映射$\pi:\mathscr{T}(L)\longrightarrow\mathscr{U}(L)$的核 J 在 $\mathscr{T}(L)$ 中的補空間（定理 17.3 的系E）。令$G=IntL$ 如 (23.1); G作用於 $\mathscr{T}(L)$上。顯然 $\mathscr{T}(L)$ 跟 J 在 G 的作用下保持不變，所以線性同構 $\pi:\mathscr{T}(L)\longrightarrow\mathscr{U}(L)$ 事實上是一個G模同構。記 $\mathfrak{S}(L)^G$ 爲由G不變元構成的子空間（事實上是子代數）。依引理 23.2, π 將 $\mathfrak{S}(L)^G$ 映上$\mathfrak{Z}=\mathscr{U}(L)^G$。（注意: π只是一個線性映射而不是一個代數同態。）

現在我們有一圖示: $\mathfrak{S}(L)^G\xrightarrow{\pi}\mathfrak{Z}\xrightarrow{\psi}\mathfrak{S}(H)^{\mathscr{W}}$。這產生了與(23.1)中所研究的結構有驚人的相似情況: $\mathscr{P}(L)^G\xrightarrow{\theta}\mathscr{P}(H)^{\mathscr{W}}$。事實上，藉 Killing 形式（它在$L$跟$H$都是非退化的），我們甚至能自然地將 L 與 L^*, H與 H^* 認同，而且G跟$\mathscr{W}$ 的作用在這些認同下是一致的。考慮所得的圖式:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathfrak{S}(L)^G & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{Z} & \xrightarrow{\psi} & \mathfrak{S}(H)^{\mathscr{W}} \\
\updownarrow & & & & \updownarrow \\
\mathscr{P}(L)^G & & \xrightarrow{\quad\theta\quad} & & \mathscr{P}(H)^{\mathscr{W}}
\end{array}$$

不幸的是，這個圖示並不是那樣地可交換。爲了要知道到底是怎麼一回事，我們暫停一下而先看一個簡單的例子。

範例 令 $L=sl(2,\mathbf{F})$，其標準基底爲 (x, y, h)。對偶基底 (x^*, y^*, h^*) 經由 Killing 形式可以與$\left(\frac{1}{4}y, \frac{1}{4}x, \frac{1}{8}h\right)$認同（習題5.5）。如果$\lambda$是基本制囿權 $\left(\lambda=\frac{1}{2}\alpha\right)$，則$\lambda$ 在此可與 h^* 認同，而且λ^2衍生$\mathscr{P}(H)^{\mathscr{W}}$。由於$\lambda$是$L$的一般表現的最高權，一個簡單的計算（習題 1）就能證明跡多項式 $h^{*2}+x^*y^*$ 等於 $\theta^{-1}(\lambda^2)$。在$\mathscr{P}(L)^G$跟$\mathfrak{S}(L)^G$的認同下，這變成對稱張量$(1/64)(h\otimes h)+(1/32)(x\otimes y+y\otimes x)$。$\pi$ 將此元素映至 $(1/64)h^2+(1/32)xy+(1/32)yx\in\mathfrak{Z}$。於是，爲了計算在$\psi$的作用下的像，我們必須用 PBW 基底（關於y,

h，x 的次序）將此元素改寫成 $(1/64)h^2+(2/32)yx+(1/32)h$。$\xi$ 將此送至 $(1/64)(h^2+2h)$，而且 η 也就將它送至 $\mathscr{W}$ 不變量 $(1/64)(h^2-1)$。回轉至 $\mathscr{P}(H)^{\mathscr{W}}$，這就得 $\lambda^2-1/64$。所以圖示是不能交換的。不過這相異點可用比原來開始的元素較低「次」的不變數（這兒是 1/64）來測度。

這個例子建議我們應如何去完成證明 ψ 是一個蓋射的這一件事（對於 $sl(2,\mathbf{F})$，上例就是證明）。首先我們同意將 $\mathscr{P}(L)^G$ 跟 $\mathfrak{S}(L)^G$，$\mathscr{P}(H)^{\mathscr{W}}$ 跟 $\mathfrak{S}(H)^{\mathscr{W}}$ 認同。其次，如果 $\mathfrak{S}(H)$ 中的一個多項式是被 $\mathscr{W}$ 所固定，則它的齊次部分也顯然是被 $\mathscr{W}$ 所固定。所以只要將齊次多項式提昇至 $\mathfrak{Z}$ 就足夠了；特別我們能夠對次數做歸納（常數顯然是可提昇的）。

現在映射 θ 跟 $\xi\circ\pi$ 實質上是一樣的（回憶一下，這其中的每一個映射是如何定義的），只不過在應用 ξ 時我們必須把「對稱」元素 $\pi(f)$ 以 PBW 基底重寫。這引介了一些新的項。然而如 f 的次數是 k，則 $\pi(f)$ 是在 $\mathscr{U}(L)$ 中 $x_1\cdots\cdots x_k$ 諸項的和（x_i 是取自 L 的固定基底元素），所以由交換而得的新項顯然是具有 $x_1\cdots\cdots x_j$ 的形式，$i<k$

映射 η（將 h_i 送至 h_i-1）對 $\mathfrak{S}(H)$ 中的多項式的最高次項沒有任何作用。要點是這樣的，當我們先利用 θ^{-1}，採着是 π，然後是 ψ 時，我們就重獲我們原來的齊次元素，只不過較低次的項可能是不一樣的。依歸納法假設，較低次的項在 ψ 的作用下已是 $\mathfrak{Z}$ 的元素的像，所以證明完畢。

【附　　錄】

在這一節中還有一個事實沒有證明：限制映射 $\mathscr{P}(L)^G\longrightarrow\mathscr{P}(H)^{\mathscr{W}}$ 是一個嵌射 (23.1)。這一事實在 Harish-Chandra 定理的證

明中並不得重要，不過如果就這樣默默地帶過去又似乎難令人滿意。我們可以將它化成爲仿射代數幾何的架構中的一個單純密集的論證。

令$A=\mathbf{F}^n$（稱爲仿射 n 維空間）；在此我將不考慮 A 的向量空間結構。令 $\mathbf{F}[T]=\mathbf{F}[T_1,\cdots\cdots,T_n]$ 爲 n 個未知數的多項式環。如果I是 $\mathbf{F}[T]$ 的一個理想，令$\mathscr{V}(I)=\{x=(x_1,\cdots\cdots,x_n)\in A\,|\,f(x)=0\ \forall f\in I\}$。我們定義 $\mathscr{V}(I)$ 是一閉集合而以此在 A 中定一個位相；顯然ϕ跟A是閉的，同時，閉集有限聯集或任意交集也是閉集的這些事實也很容易驗證（例如利用$\mathscr{V}(\sum_\alpha I_\alpha)=\bigcap_\alpha\mathscr{V}(I_\alpha)$。這樣的位相稱爲 Zariski 位相。（當 $\mathbf{F}=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 時，一個 Zariski 閉集在 $\mathbf{F}^n$ 的通常位相裏也是閉集，不過其逆不眞。）

如果 $f(T)\in\mathbf{F}[T]$，函數 $x\longrightarrow f(x)(A\longrightarrow\mathbf{F})$ 稱爲A上的一個多項式函數。這樣的函數在 Zariski 位相中顯然是一個連續函數。$\mathbf{F}$是一具有 Zariski 位相的仿射 1 維空間。因爲$\mathbf{F}$是無限的，所以在A上取 0 值的僅有多項式是 0 多項式（如衆所週知的）。

設$V\subset A$是一子集合。如果$V\subset V_1\cup V_2$，其中 V_1, V_2 是 A中的閉集，則必$V\subset V_1$或 $V\subset V_2$，我們就稱V是既約的。（「既約」必是連通，反之不然。）

引理 A. A是既約的。

證明 令$A=\mathscr{V}(I_1)\cup\mathscr{V}(I_2)$而且假定此兩閉集都是眞子集。則$I_1\neq 0\,I_2\neq 0$。令 $f\in I_1, g\in I_2$ 爲非零多項式。則 $fg\neq 0$，但是 fg 在A是恒取 0 值，這是荒謬的。

系 A中的任何開集都是稠密的。

證明 令U是一非空開集。如果U不是稠密的，則存在一個非空開集$V\subset A$使得 $U\cap V=\phi$；於是閉集$A-U, A-V$ 是眞子集，而且$(A-U)\cup(A-V)\supset A$，與引理不合。

現在回到第二十三節的情況：L 是半單的，H 是一個 CSA（等

等。）固定L的一組基底使得L可與一仿射n維空間認同($n=dimL$)而且使$\mathscr{P}(L)$與上面所介紹的多項式函數認同。關於此一基底，adx可以一個$n\times n$矩陣表示，它的坐標是L上的線性（因此是多項式）函數。令T是一未知數，而且記（對$x\in L$）$p_x(T)=adx$ 的固有多項式$=\sum_{i=1}^{n}c_i(x)T^i$。顯然，每一個 c_i 是L上的一個多項式函數。

令L的ρ秩爲使得 c_m 不恒爲0的最小整數m，並且稱$x\in L$爲ρ正則當且僅當 $c_m(x)\neq 0$ 。換句話說，x是 ρ 正則當且僅當0視爲 adx 的固有值時有儘可能最小的重複數。這證明 x是ρ正則當且僅當 x_s 是ρ正則（因爲他們有相同的固有多項式）；特別，ρ正則半單元素是存在的。顯然L所有的ρ正則元素的集合$\mathscr{R}$是一個開集；由於是開集而且非空，所以它是稠密的（由以上的系理）。

如果$x\in L$是半單的，x落在一極大環面子代數，所以共軛定理導致x在G的作用下與H的某一元素是共軛的。但是如果$h\in H$，我們知道 $dim\,c_L(h)\geq l=rank\,L$,我們也知道$H$有元素（稱爲正則的）使得 $dim\,c_L(h)=l$ (15. 3)。因爲存在 ρ正則半單元素，所他們必須與正則半單元素是一致的（而且$m=l$）。但是除0以外沒有其他的冪零元素可與一個正則半單元素交換。由前面的一段，x是ρ正則導能$x=x_s$。這使我們能够描述$\mathscr{R}$爲一切正則半單元素的集合。

現在令 $f\in\mathscr{P}(L)^G, f|_H=0$ 。特別這導致f在$\mathscr{R}$上取0值，但是$\mathscr{R}$是稠密的，所以$f=0$。因此$\theta:\mathscr{P}(L)^G\longrightarrow\mathscr{P}(H)^{\mathscr{W}}$是一個嵌射。

習　題

1. 在（23. 3）的例子中，試驗證所給的跡多項式是正確的。
2. 對 A_2,B_2,G_2 型代數，試以基本制囿權 λ_1,λ_2 明確地計算

$\mathscr{P}(H)^{\mathscr{W}}$的衍生元。試利用這一節中的方法說明這其中的一些衍生元是如何地提昇至$\mathfrak{Z}$。（也請注意一下，在每一種情形中，$\mathscr{P}(H)^{\mathscr{W}}$是一多項式代數其衍生元的個數是 $l=2$。）

3. 如果 $\langle\lambda,\alpha\rangle$ 是一整數，則當 λ 是H 上的任意線性函數命題 23.2 還是成立。

4. 由公式 (*) $\chi_\lambda(z)=\lambda(\xi(z))$(23.3)，試直接計算泛 Casimir 元 c_L (22.1) 在 $V(\lambda)$ 上的值，$\lambda\in\Lambda^+$: $(\lambda+\delta,\lambda+\delta)-(\delta,\delta)$。〔先回憶一下，$t_\alpha$ 跟 h_α 分別與 z_α 跟 y_α 的關係。其次，依一個 PBW 基底的次序將 c_L 改寫，並且利用 (22.3) 中所導出的事實那就是，對任何權 μ，$(\mu,\mu)=\sum_i\mu(h_i)\mu(k_i)$。〕

5. 試證佈於 $F(charF=0)$ 上的任何 n 變數多項式是諸線性多項式的某些冪的一個線性組合。〔試對 n 做歸納，展開 $(T_1+aT_2)^k$ 然後利用 Vandermonde 行列式論證證明當 $n=2$ 時諸線性多項式的 k 次冪生成一個空間其維數正是所要求的。〕

6. 如果 $\lambda\in\Lambda^+$，試證凡與 λ 連接的 μ 必滿足 $\mu\prec\lambda$，因此所有這樣的 μ 都是 $Z(\lambda)$ 的權

7. 令 $\mathscr{D}=[\mathscr{U}(L),\mathscr{U}(L)]$是在$\mathscr{U}(L)$ 中由所有的 $xy-yx(x,y\in\mathscr{U}(L))$ 生成的子空間。試證 $\mathscr{U}(L)$ 是子空間$\mathscr{D}$跟 $\mathfrak{Z}$的直和（由此，我們可以擴張 χ_λ 至全部的 $\mathscr{U}(L)$）其中只要要求 χ_λ 在$\mathscr{D}$上取 0 值就可以了）。〔回憶習題 17.3 得知 $\mathscr{U}(L)$ 是有限維 L 模的和，因為 L 是半單，所以 $\mathscr{U}(L)$ 是完全可約的。試證 $\mathfrak{Z}$是 $\mathscr{U}(L)$ 所有的自明子 L 模的和，同時 $\mathscr{D}$ 與由所有的 $ad\,x(y)$, $x\in L$, $y\in\mathscr{U}(L)$組成的空間是一致的，後者跟 $\mathfrak{Z}$是互補的。〕

8. 在 H^* 跟仿射 l 維空間的認同下，試證權格 Λ 在 H^* 中是 Zariski 稠密的。利用這結果試證明系 2 (23.2)能擴張至所有的 λ，$\mu\in H^*$。

9. 試證每一個代數同態 $\chi: \mathfrak{Z} \longrightarrow \mathscr{F}$ 都是形如 χ_λ，其中 $\lambda \in H^*$〔將 χ 看成是一同態 $\mathfrak{S}(H)^{\mathscr{W}} \longrightarrow \mathbf{F}$，並且證明它的核在 $\mathfrak{S}(H)$ 中生成一個眞理想。〕

10. 試證映射 $\psi: \mathfrak{Z} \longrightarrow \mathfrak{S}(H)^{\mathscr{W}}$ 與Δ的選取是無關的。

附　　註

關於不變多項式的 Chevalley 定理　Steinherg 證明是記錄在 Verma〔1〕的論文的一個附錄裏及在 Varadarajan〔1〕，§5.6 中。對於 Harish-Chandra 在特徵標上的工作的報告，可參考 Harish-Chandro〔1〕, Seminaire "Sophus Lie"〔1〕Expose 19 及 Varadarajan〔1〕，§5.7。我們是採用 Verma〔1〕。

24.　Weyl, Kostant 及 Steinberg 等公式

沿用第二十三節的記號。我們將利用 Harish-Chandra 定理（23, 3）去得到一些關於特徵標跟有限維 L 模的重複數的公式。這些都沒有用到 Freudenthal 公式（22.3)。

24.1.　H* 上的一些函數

對於 $\lambda \in \Lambda^+$，已在（22, 5）介紹 $V(\lambda)$ 的形式特徵標：$ch_\lambda = \sum_{\mu \in \Lambda} m_\lambda(\mu) e(\mu)$，其中 $e(\mu)$ 形成羣環 $\mathbf{Z}[\Lambda]$ 的一組基底。對無限維模 $Z(\lambda)$ 定義形式特徵標也是很方便的，只不過在此，無限形式和將會是不便於處理。我們捨此而改用更具建議性的形式。$Z[\Lambda]$ 能够看成是Λ上的 $\mathbf{Z}$ 值函數的集合（0 在一個有限集合外）。讀者易驗出乘法運算變成褶積，$f * g(\lambda) = \sum_{\mu+\nu=\lambda} f(\mu) g(\nu)$

令$\mathscr{X}$是在 H^* 上所有的$\mathbf{F}$值函數 f 其檯集（定義爲 $\{\lambda \in H^*: f$

$(\lambda)\neq 0\})$ 是包含在有限個形如 $\{\lambda-\sum_{\alpha\succ 0}k_\alpha\alpha, k_\alpha\in\mathbf{Z}^+\}$ 的集合（這樣的集合當然出現在一模 $Z(\lambda)$, $\lambda\in H^*$ 的權集合中）的聯集裡。$\mathfrak{X}$是一個空間。

只要稍微想一下就能證明$\mathfrak{X}$在褶積的運算下是封閉的；於是它就成爲一個可交換，結合的$\mathbf{F}$代數，包含任何標準循環L模的形式特徵標。

讀者將發現有時將$f\in\mathfrak{X}$想成是 $\lambda\in H^*$ 的一個形式組合（以F的元素爲係數）是很方便的。在這樣的看法之下，對應到我們先前的$e(\lambda)$ 的是什麼呢？顯然這正是特徵函數 $\varepsilon_\lambda(\lambda)=1$，$\varepsilon_\lambda(\mu)=0$，$\mu\neq\lambda$。注意，$\varepsilon_0$ 是環$\mathfrak{X}$中的么元。而且 $\varepsilon_\lambda*\varepsilon_\mu=\varepsilon_{\lambda+\mu}$ Weyl 羣在$\mathfrak{X}$上的作用是 $(\sigma^{-1}f)(\lambda)=f(\sigma\lambda)$；特別，$\sigma^{-1}(\varepsilon_\lambda)=\varepsilon_{\sigma\lambda}$。

現在必須介紹$\mathfrak{X}$的另兩個重要的元素。首先，考慮滿足$-\lambda=\sum_{\alpha\succ 0}k_\alpha\alpha$ 的非負整數的集給 $\{k_\alpha, \alpha\succ 0\}$，令 $p(\lambda)$ 表示所有這種集合的個數。除非λ落在根格子裏否則 $p(\lambda)=0$。注意 $p=ch_{Z(0)}$(習題20.5)特別；$p\in\mathfrak{X}$。我們稱p是 Kostant 函數（它跟 Kostant 分割函數只差λ的符號的一個改變)。其次，我們令 $q=\prod_{\alpha\succ 0}(\varepsilon_{\alpha/2}-\varepsilon_{-\alpha/2})$（其中乘積記號$\prod$恆表示$\mathfrak{X}$中的褶積）。稱$q$爲 Weyl 函數。

現在我們要證明一些跟上面所定義的函數有關的簡單引理。對每一正根α，$k\in\mathbf{Z}^+$,，令 $f_\alpha(-k_\alpha)=1$，否則 $f_\alpha(\lambda)=0$。(在記號上 f_α 可以想像成 $\varepsilon_0+\varepsilon_{-\alpha}+\varepsilon_{-2\alpha}+\cdots\cdots$)。顯然 $f_\alpha\in\mathfrak{X}$。

引理 A. (a) $p=\prod_{\alpha\succ 0}f_\alpha$。

(b) $(\varepsilon_0-\varepsilon_{-\alpha})*f_\alpha=\varepsilon_0$。

(c) $q=\prod_{\alpha\succ 0}(\varepsilon_0-\varepsilon_{-\alpha})*\varepsilon_\delta$。

證明 (a) 這可由褶積的定義立即得到。(b) 形式上，$(\varepsilon_0-\varepsilon_{-\alpha})$

$*(\varepsilon_0+\varepsilon_{-\alpha}+\varepsilon_{-2\alpha}+\cdots\cdots)=\varepsilon_0$ 蓋因其他的項都相消掉。（我們很容易給以嚴密的證明。）(c) 因爲 $\delta=\sum_{\alpha>0}\frac{1}{2}\alpha, \varepsilon_\delta=\prod_{\alpha>0}\varepsilon_{\alpha/2}$。但是，$(\varepsilon_0-\varepsilon_{-\alpha})*\varepsilon_{/2}=\varepsilon_{\alpha/2}-\varepsilon_{-\alpha/2}$，故得證。

引理 B. $\sigma q=(-1)^{l(\sigma)}q\ (\sigma\in\mathscr{W}), l(\sigma)$ 如 (10.3)。

證明 只要證明在 $\sigma=\sigma_\alpha$ 爲一單鏡射，即 $l(\sigma)=1$ 的情形下，引理會成立就足够了。但是 σ_α 對 α 以外的正根有排列作用而且將 α 送至 $-\alpha$（引理 10.2B），所以 $\sigma_\alpha q=-q$。

引理 C. $q*p*\varepsilon_{-\delta}=\varepsilon_0$。

證明 將引理 A 的三個部分組合起來就得 $q*p*\varepsilon_{-\delta}=\prod_{\alpha>0}(\varepsilon_0-\varepsilon_{-\alpha})*\varepsilon_\delta*p*\varepsilon_{-\delta}=\prod_{\alpha>0}((\varepsilon_0-\varepsilon_\alpha)*f_\alpha)=\varepsilon_0$。

引理 D. $ch_{Z(\lambda)}(\mu)=p(\mu-\lambda)=(p*\varepsilon_\lambda)(\mu)$。

證明 第一個等式是顯然的（參考習題 20.5），第二個也是一樣。

引理 E. $q*ch_{Z(\lambda)}=\varepsilon_{\lambda+\delta}$。

證明 將引理 C 跟 D 組合起來就得證。

在引理 B 中出現的係數 $(-1)^{l(\sigma)}(\sigma\in\mathscr{W})$ 此後將縮寫成 $sn(\sigma)$。記住，當 L 是 A_l 型號，$\mathscr{W}$ 跟對稱羣 $\mathscr{S}_{l+1}$ 是同構的，而且 $sn(\sigma)$ 跟排列 σ 的符號（偶排列爲正，奇排列爲負）是一致的。

24.2. Kostant 的重複數公式

現在的主要想法是想將有限維模 $V(\lambda)(\lambda\in\Lambda^+)$ 的形式特徵標 ch_λ 表成某些 $ch_{Z(\mu)}$ 的 $\mathbf{Z}$ 線性組合，而且接着利用前一小節的引理（以及 Harish-Chandra 定理）簡化所得的結果。

令 $\mathfrak{M}_\lambda$ 表示滿足以下諸性質的 L 模 V 的全體（$\lambda\in H^*$ 是固定的）：

(1) V是權空間（關於H）的直和。

(2) 對於$\lambda\in H^*$, $\mathfrak{Z}$在V上的作用等於是純量 $\chi_\lambda(z)(z\in\mathfrak{Z})$ 的乘法。（$\mathfrak{Z}=\mathscr{U}(L)$ 的中心。）

(3) V的形式特徵標是屬於$\mathscr{X}$。

當然，權λ所有的標準循環模都滿足這些條件；他們的子模（它不恆爲標準循環子模的和）也是同樣的。事實上，$\mathfrak{M}_\lambda$在取子模，取同態像以及形成(有限)直和下是封閉的。由 Harish-Chandra 定理 (23. 3) 得知當λ跟μ是連接時$\mathfrak{M}_\lambda=\mathfrak{M}_\mu$。

引理　$V\in\mathfrak{M}_\lambda$。則V至少有一極大向量（如果$V\neq 0$）。

證明　因爲性質(2)之故，對於每一個$\alpha\succ 0$跟V的每一權μ，$\mu+k\alpha$ 對足够大的$k\in\mathbf{Z}^+$ 來說將不再是V的一個權。這使得我們淸楚地看出一件事，那就是對某些權μ, $\mu+\alpha$ $(\alpha\succ 0)$ 不再是一個權；因此V_μ 的任何非零向量就是極大。

對每一$\lambda\in H^*$，令$\theta(\lambda)=\{\mu\in H^*|\mu\prec\lambda$ 而且 $\mu\sim\lambda\}$。複習 (23. 2) 知$\mu\sim\lambda$的意思是$\mu+\delta$跟$\lambda+\delta$是$\mathscr{W}$共軛。在以下的主要結果中，我們利用 Harsh-Chandra 定理限制 $Z(\lambda)$ 的合成因子的最高權的可能性。

命題　令$\lambda\in H^*$。則

(a) $Z(\lambda)$ 有一合成列。

(b) $Z(\lambda)$ 的每一個合成的因子都是形如 $V(\mu)$ 一般，其中$\mu\in\theta(\lambda)$ 而且 $V(\mu)$ 是跟 (20. 3) 所定義的一樣。

(c) $V(\lambda)$ 在 $Z(\lambda)$ 的合成列中出現一次。

證明　(a) 如果 $Z(\lambda)$ 是既約的，則 $Z(\lambda)=V(\lambda)$，而且沒有什麼好證明。否則 $Z(\lambda)$ 有一非零眞子模V落在 $\mathfrak{M}_\lambda$ 中（所給的λ是用在條件(2)上）。因爲 $dim\mathbf{Z}(\lambda)_\lambda=1$，$\lambda$不可能是$V$的一個權。由以上的引理，$V$有一極大向量（就說它所屬的權是$\mu\precneqq\lambda$），因此$V$

包含 $Z(\mu)$ 的一個非零像W。特別，$\chi_\lambda=\chi_\mu$，所以 $\lambda\sim\mu$（由 Harish-Chandra 定理），而且 $\mu\in\theta(\lambda)$。現在考慮 $Z(\lambda)/W, W$。每一個模都是標準循環的（而且落在 $\mathfrak{M}_\lambda$ 中），但是在它所有的權中會與 λ 連接的權的個數或者要比 $Z(\lambda)$ 的少，或者是相等但卻有一些的重複數要比 $Z(\lambda)$ 的小。對 $Z(\lambda)/W$ 跟 W重複以上的論證就得子模的子模及同態像，他們的權與 λ 會連接的個數越來越少或他們的權的重複數越來越少。這顯然說明了我們的做法在有限步驟之後就得停止，因而得到 $Z(\lambda)$ 的一個合成列。

(b) $Z(\lambda)$ 的每一個合成因子都落在 $\mathfrak{M}_\lambda$中，所以有一極大向量（由引理），因此必是標準循環的（因是旣約之故）。由（20.2）得知，每一合成因子跟某一個 $V(\mu)$ 是同構的。我們已看過，這樣的 μ 必須屬於 $\theta(\lambda)$。

(c) 因爲 $dim Z(\lambda)=1$，所以這是顯然的。

命題使我們能够記 $ch_{Z(\lambda)}=ch_{V(\lambda)}+\sum d(\mu)ch_{V(\mu)}$ $(d(\mu)\in Z^+)$，其中和是取於所有的 $\mu\in\theta(\lambda)$, $\mu\neq\lambda$ 之上。還是固定 $\lambda\in H^*$，而且對 $\theta(\lambda)$ 的元素規定一種次序如 $(\mu_1,\cdots\cdots,\mu_t)$ 一般，其規則是 $\mu_i\prec\mu_j$ 導致 $i\leq j$(特別，$\lambda=\mu_1$)。根據命題，每一 $ch_{Z(\mu_j)}$ 可以表成 $ch_{V(\mu_i)}$ $i\leq j$ 的一個**Z**線性組合（$ch_{V(\mu_j)}$ 也在此組合中出現一次）。所以所得的 t 個方程式有一關於所選定的次序的三角矩陣其對角元素是 1，特別它的行列式值是 1，所以我們可以反過來將每一個 $ch_{V(\mu_i)}$ 表成 $ch_{Z(\mu_j)}$, $i\leq j$ 的 Z 線性組合，$ch_{Z(\mu_j)}$ 在此組合中出現一次。（現在當然可能有些係數是負的。）

系 令 $\lambda\in H^*$。則 $ch_{V(\lambda)}$ 是一線性組合 $\sum c(\mu)ch_{Z(\mu)}$（取和於 $\mu\in\theta(\lambda)$ 之上），其中 $c(\lambda)=1$。

現在我們應用引理於一個特別的情形上，那就是，λ 爲一個制囿整數權，$ch_\lambda=ch_{V(\lambda)}$。於是 $dim V(\lambda)$ 是有限的，而且對所有的 $\sigma\in$

$\mathscr{W}$, $\sigma(ch_\lambda)=ch_\lambda$。由(24.1)的引理$E$，$q*ch_\lambda=\sum c(\mu)\varepsilon_{\mu+\delta}$。由(24.1)的引理$B$, $\sigma(q*ch_\lambda)=\sigma(q)*\sigma(ch_\lambda)==sn(\sigma)q*ch_\lambda(\sigma\in\mathscr{W})$，他方面，$\sigma(\sum c(\mu)\varepsilon_{\mu+\delta})=\sum c(\mu)\varepsilon_{\sigma-1(\mu+\delta)}$ 因爲 $\mathscr{W}$ 對 $\mu+\delta$ 有遞移的排列作用（μ 跟 λ 是連接的），同時 $c(\lambda)=1$，因此如果 $\sigma^{-1}(\mu+\delta)=\lambda+\delta$ 則得 $c(\mu)=sn(\sigma)$。所以

$$(*)\qquad q*ch_\lambda=\sum_{\sigma\in\mathscr{W}}sn(\sigma)\varepsilon_{\sigma(\lambda+\delta)}。$$

最後，將(24.1)的引理C應用至此等式上就得：$ch_\lambda=q*p*\varepsilon_{-\delta}*ch_\lambda=p*\varepsilon_{-\delta}*(\sum_{\sigma\in\mathscr{W}}sn(\sigma)\varepsilon_{\sigma(\lambda+\delta)})=p*\sum_{\sigma\in\mathscr{W}}sn(\sigma)\,p*\varepsilon_{\sigma(\lambda+\delta)-\delta})=\sum_{\sigma\in\mathscr{W}}sn(\sigma)\,p*\varepsilon_{\sigma(\lambda+\delta)-\delta}$。

定理 (Kostant)令 $\lambda\in\Lambda^+$。則$V(\lambda)$的重複數可由以下的公式求得

$$m_\lambda(\mu)=\sum_{\sigma\in\mathscr{W}}sn(\sigma)p(\mu+\delta-\sigma(\lambda+\delta))。$$

這個公式的優點是將重複數直接地表示出來，但是由於是在 Weyl 羣上取和，所以當秩是很高時，計算就顯得繁冗。因此，在實用上，Freudenthal 的遞歸方法（第二十二節）常常是較易於應用。

24.3. Weyl 公式

引理 $q=\sum_{\sigma\in\mathscr{W}}sn(\sigma)\varepsilon_{\sigma\delta}$

證明 直接證明是很容易的，不過，我們將利用（24.2）的公式(*)。如果 $\lambda=0$，則 $ch_\lambda=\varepsilon_0$ 而且（*）的右端就變成 $\sum_{\sigma\in\mathscr{W}}sn(\sigma)\varepsilon_{\sigma\delta}$。

定理 (Weyl)。令 $\lambda\in\Lambda^+$。則$(\sum_{\sigma\in\mathscr{W}}sn(\sigma)\varepsilon_{\sigma\delta})*ch_\lambda=\sum_{\sigma\in\mathscr{W}}sn(\sigma)\varepsilon_{\sigma(\lambda+\delta)}$。

證明 利用（24,2）中的公式（*）及以上的引理。

Weyl 的特徵標公式事實上說明了一件事，那就是我們可以將 ch_λ 看成是$\mathbf{Z}[\Lambda]$的兩個簡單交錯和的商。在實用上，如果要從事這「除法」會是很費時又費力的，所以 Frendenthal 方法（第二十二節）通常是

較快的。然而，由 Weyl 公式我們能够得到一個對於 $V(\lambda)(\lambda\in\Lambda^{+})$ 的維數，記為 $deg(\lambda)$，來說是相當有用的公式。因為 $V(\lambda)$ 是諸權空間的直和，所以 $deg(\lambda)=\sum_{\mu\in\pi(\lambda)} m_{\lambda}(\mu)$ 是顯然的。這正是形式和 $\sum_{\mu} m_{\lambda}(\mu)e(\mu)\in\mathbf{Z}[\Lambda]$ 的係數的和。依函數的記號，這就變成 ch_{λ} 的值的和。現在讓我們考慮 $\mathscr{X}$ 的一個子代數 $\mathscr{X}_0$，它是由一切的特徵函數 $\varepsilon_{\lambda}(\lambda\in\Lambda)$ 生成的，所以函數 $v:\mathscr{X}_0\longrightarrow\mathbf{F}$ 將 $f\in\mathscr{X}_0$ 對應到它的值的和是有明確的定義。我們的難題是把 $v(ch_{\lambda})$ 看成是 λ 的函數而要計算此函數。不幸的是當 v 應用到像 $\sum_{\sigma\in\mathscr{W}} sn(\sigma)\varepsilon_{\sigma\delta}$ 的這種交錯和時，其值為零，所以我們必須直接進行。對任何 $\lambda\in\Lambda^{+}$，將 $\sum_{\sigma\in\mathscr{W}} sn(\sigma)\varepsilon_{\sigma\delta}$ 縮寫成 $\omega(\lambda+\delta)$。

對應 $\varepsilon_{\lambda}\longrightarrow(\lambda,\alpha)\varepsilon_{\lambda}$（對於固定根 α）能擴張成 $\mathscr{X}_0$ 的一個自同態 ∂_{α}，事實上它是一個導子運算。一般說來，自同態 $\partial=\prod_{\alpha\succ0}\partial_{\alpha}$ 不再是一個導子，但可以看成是一個微分算子。Weyl 公式可寫成：$\omega(\delta)*ch_{\lambda}=\omega(\lambda+\delta)$ 這裏 $\omega(\delta)$ 是 Weyl 函數（以前是記為 q），它是等於 $\varepsilon_{-\delta}*\prod_{\alpha\succ0}(\varepsilon_{\alpha}-1)$（參考 q 的原來定義）。現在將 ∂ 應用到 Weyl 公式的兩端，並且利用 Leibniz 法則，就得：$v(\partial(\omega(\delta)*ch_{\lambda}))=v(\partial\omega(\delta))v(ch_{\lambda})$，即 $deg(\lambda)=\dfrac{v(\partial(\omega(\lambda+\delta)))}{v(\partial\omega(\delta))}$。

只要稍微想一下就能證明；$v(\partial\varepsilon_{\delta})=\prod_{\alpha\succ0}(\delta,\alpha)$；同理。$v(\partial\varepsilon_{\sigma\delta})=\prod_{\alpha\succ0}(\sigma\delta,\alpha)=\prod_{\alpha\succ0}(\delta,\sigma^{-1}\alpha)$。不過要記住，被 σ^{-1} 送至負根的正根的個數是 $l(\sigma^{-1})=l(\sigma)$（參考引理 A(10.3)），所以這正是 $sn(\sigma)\prod_{\alpha\succ0}(\delta,\alpha)$，$sn(\sigma)=(-1)^{l(\sigma)}$。換句話說，$v(\partial\omega(\delta))=\sum_{\sigma\in\mathscr{W}} sn(\sigma)v(\partial\varepsilon_{\sigma\delta})=\sum_{\sigma\in\mathscr{W}} sn(\sigma)^2\prod_{\alpha\succ0}(\delta,\alpha)=Card(\mathscr{W})\prod_{\alpha\succ0}(\delta,\alpha)$。對 $\omega(\lambda+\varrho)$ 用相同的論證就得 $Card(\mathscr{W})\prod_{\alpha\succ0}(\lambda+\delta,\alpha)$。將所得的結果代入上一段的商就得：

系　令　$\lambda \in \Lambda^+$。則 $deg(\lambda)=\dfrac{\prod_{\alpha>0}(\lambda+\delta,\alpha)}{\prod_{\alpha>0}(\delta,\alpha)}$。

爲了要計算一些例子，我們觀察到一件事，對分母跟分子同時乘上 $\prod_{\alpha>0}\dfrac{2}{(\alpha,\alpha)}$，我們就得 $deg(\lambda)=\dfrac{\prod_{\alpha>0}<\lambda+\delta,\alpha>}{\prod_{\alpha>0}<\delta,\alpha>}$(整數的一個商)。但是$<\lambda+\delta,\alpha>=(\lambda+\delta,\alpha^\vee)$, $\alpha^\vee$ 是對偶根。因爲 $\Delta^\vee$ 是 $\Phi^\vee$ 的一組基底（習題 10.1），我們能够記 $\alpha^\vee=\sum_i c_i^{(\alpha)}\alpha_i^\vee$，因此$<\lambda+\delta,\alpha>=\sum_i c_i^{(\alpha)}<\lambda+\delta,\alpha_i>=\sum_i c_i^{(\alpha)}(m_i+1)$ $(\lambda=\sum_i m_i\lambda_i)$。所以我們只要計算整數 $c_i^{(\alpha)}$就行了（習題 7）。

範例　對於 A_1 型來說，$\lambda_1=\frac{1}{2}\alpha=\delta$。所以公式讀做：$deg(\lambda)=m+1$，$\lambda=m\lambda_1$ 參考定理 7.2。

現在讓我們將注意力集中在秩爲 2 的情形，記 $\lambda=m_1\lambda_1+m_2\lambda_2$。對於 A_2 型來說，其至根爲 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2$。於是，上面的分母是 $1\cdot 1\cdot 2$，然而分子是 $(m_1+1)(m_2+1)(m_1+m_2+2)$ 對於 B_2 及 G_2 來說，計算是很類似的（取 α_2 爲 B_2 的短根，α_1 爲 G_2 的短根，完全跟第十一節是一致的）。總結而得（習題 7）：

(A_2)　$\dfrac{1}{2}(m_1+1)(m_2+1)(m_1+m_2+2)$

(B_2)　$\dfrac{1}{3!}(m_1+1)(m_2+1)(m_1+m_2+2)(2m_1+m_2+3)$

(G_2)　$\dfrac{1}{5!}(m_1+1)(m_2+1)(m_1+m_2+2)(m_1+2m_2+3)$
$(m_1+3m_2+4)(2m_1+3m_2+5)$

對於 G_2 來說，$deg(\lambda_2)=14$。因爲 $\lambda_2=3\alpha_1+2\alpha_2$ 是最高根，我們認爲$V(\lambda_2)$ 是正則表現的表現空間。$Deg(\lambda_1)=7$。在此，$V(\lambda_1)$ 是$\mathscr{C}_0$ (Cayley 代數的跡 0 子空間 (19.3))。

24.4. Steinberg 公式

我們能够組合 Kostant 及 Weyl 的公式而得到一個關於 $V(\lambda)$ 在張量積 $V(\lambda')\otimes V(\lambda'')$ 中出現的次數的明確公式（這是由 R. Steinberg 提出的）。由於 Weyl 定理（關於有限維 L 模的完全可約性）(6.3) 之故，如果 $\lambda',\lambda''\in\Lambda^+$，我們能够將 $V(\lambda')\otimes V(\lambda'')$ 寫成一些 $V(\lambda)$ 的直和，每一個出現 $n(\lambda)$ 次數（如果 $V(\lambda)$ 不出現就記 $n(\lambda)=0$）。特別，張量積的形式特徵標等於 $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda+} n(\lambda)ch_\lambda$。他方面，我們在 (22.5) 中證明了此形式特徵標等於 $ch_\lambda * ch_\lambda$。於是:

$$ch_\lambda * ch_\lambda=\sum_\lambda n(\lambda)ch_\lambda\text{。}\tag{1}$$

如前，將式子 $\sum\limits_{\sigma\in\mathscr{W}} sn(\sigma)\varepsilon_{\sigma(\mu+\delta)}$ 縮寫爲 $\omega(\mu+\delta)$，其中 $\mu\in\Lambda^+$。如果在 (1) 式的兩端乘法以 $\omega(\delta)$ 而且對 λ',λ'' 分別利用 Weyl 公式 (24.3)，我們得:

$$ch_\lambda * \omega(\lambda''+\delta)=\sum_\lambda n(\lambda)\omega(\lambda+\delta)\text{。}\tag{2}$$

其次，我們記 $ch_{\lambda'}=\sum\limits_\mu m_{\lambda'}(\mu)\varepsilon_\mu$ 並且將 $m_{\lambda'}(\mu)$ 換成它在 Kostant 公式 (24.2) 中的值。等式 (2) 於是變成:

$$\begin{aligned}\sum_\mu\sum_{\sigma\in\mathscr{W}} sn(\sigma)p(\mu+\delta-\sigma(\lambda'+\delta))\varepsilon_\mu * \omega(\lambda''+\delta)\\=\sum_\lambda n(\lambda)\omega(\lambda+\delta)\text{。}\end{aligned}\tag{3}$$

利用 $\omega(\lambda''+\delta)$ 的明確形式，這就讀做:

$$\begin{aligned}\sum_\mu\sum_{\sigma\in\mathscr{W}}\sum_{\tau\in\mathscr{W}} sn(\sigma\tau)p(\mu+\delta-\sigma(\lambda'+\delta))\varepsilon_{\tau(\mu+\delta)+\mu}\\=\sum_\lambda\sum_{\sigma\in\mathscr{W}} n(\lambda)sn(\sigma)\varepsilon_{\sigma(\lambda+\delta)}\text{。}\end{aligned}\tag{4}$$

爲了比較 (4) 式的兩邊我們先改變變數。在右邊，以 ν 取代 λ，其中 $\sigma(\lambda+\delta)=\nu+\delta$，就得

(5)
$$\sum_{\nu}\sum_{\sigma\in\mathscr{W}} sn(\sigma)n(\sigma(\nu+\delta)-\delta)\varepsilon_{\nu+\delta}\text{。}$$

在左邊，以 ν 取代 μ，其中 $\tau(\lambda''+\delta)+\mu=\nu+\delta$，就得：

(6)
$$\sum_{\nu}\sum_{\sigma\in\mathscr{W}}\sum_{\tau\in\mathscr{W}} sn(\sigma\tau)p(\nu+2\delta-\sigma(\lambda'+\delta)-\tau(\lambda''+\delta))\varepsilon_{\nu+\delta}\text{。}$$

現在令 ν 是制圍的。於是，除非 $\sigma=1$ 否則 $\sigma(\nu+\delta)-\delta$ 就不能是制圍的（習題13.10)。所以，$n(\sigma(\nu+\delta)-\delta)=0$ 除非 $\sigma=1$，這是說在 (5) 式中 $\varepsilon_{\nu+\delta}$ 的係數恰恰好是 $n(\nu)$。由 (6) 我們已證明了。

定理 **(Steinberg)** 令 $\lambda',\lambda''\in\Lambda^+$。則 $V(\lambda)$, $\lambda\in\Lambda^+$ 出現在 $V(\lambda')\otimes V(\lambda'')$ 中的次數可用以下的公式表示

$$\sum_{\sigma\in\mathscr{W}}\sum_{\tau\in\mathscr{W}} sn(\sigma\tau)p(\lambda+2\delta-\sigma(\lambda'+\delta)-\tau(\lambda''+\delta))\text{。}$$

這公式（像 Kostant 的公式一樣）是很明確的，但是當 Weyl 羣太大時，畢竟是不容易應用。在習題 9 中，我們發展出一個通常是較爲實用的公式。

習　　題

1. 當 L 是 A_1 型時，試直接證明 Weyl 的特徵標公式 (24.3)。

2. 試利用 Weyl 的維數公式證明最小的可能維數的一個信實，既約的有限維 L 模有最高權 λ_i，其中 i 是 $\{1,2,\cdots\cdots,l\}$ 中的某些數。

3. 試利用 Kostant 的公式驗證列在例 1 (22.4) 的一些重複數，並且在此比較 ch_λ 跟 Weyl 的公式所給的式子。

4. 對特別情形 A_1，試比較 Steinberg 的公式跟 Clebsch-Gordan 公式（習題 22.7）。

5. 試利用 Steinberg 的公式，分解 G_2 模 $V(\lambda_1)\otimes V(\lambda_2)$ 成它的既約成分的和，試利用 Weyl 的公式驗證既約成分的維數和正好是 $dimV(\lambda_1)\cdot dimV(\lambda_2)$。

6. 令 $L=sl(3,\mathbf{F})$ 把 $\lambda=m_1\lambda_1+m_2\lambda_2$ 簡記爲 (m_1,m_2)。試利用 Steinberg 的公式驗證 $V(1,0)\otimes V(0,1)\simeq V(0,0)\oplus V(1,1)$。

7. 試驗證 (24,3) 中的次數公式；試對 C_3 型的代數導出這樣的公式。在一般情形下，如何才能求出整數 $c_i^{(\alpha)}$?

8. 令 $\lambda\in\Lambda$。如果在$\mathscr{W}$中存在 $\sigma\neq 1$ 會固定 λ，試證 $\sum_{\sigma(\lambda)=\lambda} sn(\sigma)\varepsilon_{\sigma(\lambda)}=0$ 〔試利用 λ 是落在某一 Weyl 室的閉包中而不是在其內部這一事實求一個會固定 λ 的鏡射，因而導出固定 λ 的羣的元數是偶數。〕

9. 此習題的目的是想就所牽涉到的一個模的權的明確知識去求得一個張量積的另一個分解。如 (24.4) 一般，一開始考慮 (2) 式 $ch_\lambda*\omega(\lambda''+\delta)=\sum_{\lambda\in\Lambda+}n(\lambda)\omega(\lambda+\delta)$。在左邊以 $\sum_{\lambda\in\Lambda}m_\lambda'(\lambda)$ 代替 ch_λ，然後組合起來就得：

$$\sum_{\sigma\in\mathscr{W}}sn(\sigma)\sum_{\lambda}m_\lambda'(\lambda)\varepsilon_{\sigma(\lambda+\lambda''+\delta)}$$

(試利用$\mathscr{W}$在 $V(\lambda')$ 的權空間中有排列作用這一事實)。其次，證明 (2) 式的右邊可以表示成 $\sum_{\sigma\in\mathscr{W}}sn(\sigma)\sum_{\lambda\in\Lambda+}n(\lambda)\varepsilon_{\sigma(\lambda+\delta)}$。如果$\mathscr{W}$有某一元素 $\sigma\neq 1$ 固定 μ 則定義 $t(\mu)=0$，又如果除 1 以外沒有其他元素會固定 μ 而且 $\sigma(\mu)$ 是制囿的就定義 $t(\mu)=sn(\sigma)$。則由習題 8 導出：

$$ch_{\lambda'}*ch_{\lambda''}=\sum_{\lambda\in\pi(\lambda')}m_{\lambda'}(\lambda)t(\lambda+\lambda''+\delta)ch_{\{\lambda+\lambda''+\delta\}-\delta},$$

其中大括弧表示與指定的權有共軛關係的唯一制囿權。

10. 利用習題 9 的方法重新做習題 5 及習題 6。

11. 依習題 6 中的記號，試驗證 $V(1,1)\otimes V(1,2)\simeq V(2,3)\oplus V(3,1)\oplus V(0,4)\oplus V(1,2)\oplus V(2,0)\oplus V(0,1)$。

12. 試由 Steinberg 公式導出以下事實，那就是，使得 $V(\lambda)$ 會出現爲 $V(\lambda')\otimes V(\lambda'')$ 的分量的僅有的 $\lambda\in\Lambda^+$ 就是那些形如 $\mu+\lambda''$ 的權，在此 $\mu\in\Pi(\lambda')$。如果所有這樣的 $\mu+\lambda''$ 都是制囿的，試由

習題9導出以下事實，那就是 $V(\mu+\lambda'')$ 會出現在張量積中，其出現的次數是 $m_\lambda(\mu)$。試利用這些事實對於 A_2 型的情形分解 $V(1,3)\otimes V(4,4)$（參考（22.4）的例1）。

附　註

Weyl 的原來證明是利用緊緻李羣上的積分；其後。Freudenthal 設計了一個較具代數性的證明（不過較少直觀性）：參考 Freudeuthal-deVries〔1〕，Jacobson〔1〕，Samelson〔1〕。這裏的進行方式是採用 Verma〔1〕的建議而較接近於 Bernstein, Gel'fand, Gel'fand〔1〕，至於 Kostant 公式的原來證明（較複雜）可參考 Kostant〔1〕Cartier〔1〕有一些較簡單的註解。Steinberg 的公式是由 Steinberg〔1〕導出的。在習題9中所描述關於張量積之事是由 Klimyk〔1〕提出的，它是基於 Braner 及 Weyl 的古老工作。習題 12 是D. N. Verma 提供給作者的。

第七章　Chevalley 代數與羣

記號還是跟前面幾章的一樣。L是一個佈於特徵數爲 0 的代數封閉體 $\mathbf{F}$ 上的半單李代數，H是一個 CSA, Φ 是一根系。

在這一章中我們將看到如何建構一個佈於 $\mathbf{Z}$ 上的L及它的既約表現，其可能性多少是跟L的古典的情形一樣的顯然。我們所得的結果事實上遠超過這些，我們能進一步建構佈於任何體上的 "Chevalley" 羣跟這些羣的表現。這是一個大的課題而我們僅能給讀者做一個引介。

25.　L 的 Chevalley 基底

25.1.　根　對

在 (25.2) 中我們將證明L有一組基底使得結構常數都是整數。不過首先我們將就根對 α, β，其中 $\alpha+\beta$ 也是一個根，以及等式 $[x_\alpha, x_\beta]=c_{\alpha\beta}x_{\alpha+\beta}$ 建立一些事實。以下的命題只與根系Φ有關（與L無關。）

命題　令α, β是線性無關的根，$\beta-r\alpha, \cdots\cdots, \beta, \cdots\cdots, \beta+q\alpha$ 是通過β的α根鏈。則

(a)　　$<\beta,\alpha>=r-q$。

(b)　　在此根鏈中最多出現兩種根長。

(c)　　如果$\alpha+\beta\in\Phi$，則 $r+1=\dfrac{q(\alpha+\beta,\alpha+\beta)}{(\beta,\beta)}$。

證明　(a) 這已在(9,4) 中證明過了。(同時在命題 8.4(e) 中

經由 $sl(2,\mathbf{F})$ 的表現理論也證明了這件事）

(b) $\Phi'=(Z_\alpha+Z_\beta)\cap\Phi$（在由 α，β 生成的子空間 E 中）是一組根系其秩爲 2：參考習題 9.7。如果 Φ' 是可約的，則它必是 $A_1\times A_1$ 型，即 $\Phi'=\{\pm\alpha,\pm\beta\}$，因而沒有任何需要證明的事。如果 Φ' 是即約的，$\Phi'=A_2,B_2$ 或 G_2 故得證（另一個方式是利用引理 10.4 C）。

(c) 這只要調查所有秩爲 2 的根系就能完成證明（習題 1）。然而，以下的幾何論證在一般情形下都是有效。首先我們由 (a) 得:

$$(r+1)-\frac{q(\alpha+\beta,\alpha+\beta)}{(\beta,\beta)}=q+\frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}+1-\frac{q(\alpha+\beta,\alpha+\beta)}{(\beta,\beta)}$$

$$=\frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}+1-\frac{q(\alpha,\alpha)}{(\beta,\beta)}-\frac{2q(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}$$

$$=(<\beta,\alpha>+1)\left(1-\frac{q(\alpha,\alpha)}{(\beta,\beta)}\right)。$$

我們將最後的乘積的因子分別稱爲 A 與 B。我們必須證明其中的一項是 0。這裏的情況對 α，β 來說並不是對稱的，所以分成兩種情形的討論:

(i): $(\alpha,\alpha)\geq(\beta,\beta)$。於是 $|<\beta,\alpha>|\leq|<\alpha,\beta>|$。因爲 α，β 是獨立的，由 (9.4) 我們知道 $<\beta,\alpha><\alpha,\beta>=0,1,2,$ 或 3。不等式使得 $<\beta,\alpha>=-1,0,$ 或 1。在第一種情形下，$A=0$ 故得證。否則，$(\beta,\alpha)\geq 0$，所以 $(\beta+\alpha,\beta+\alpha)$ 確實比 (β,β) 及 (α,α) 大。因爲 $\alpha+\beta\in\Phi$，(b) 導致 $(\alpha,\alpha)=(\beta,\beta)$。同理，$(\beta+2\alpha,\beta+2\alpha)>(\beta+\alpha,\beta+\alpha)$，所以 (b) 使得 $\beta+2\alpha\notin\Phi$，即 $q=1$，這使得 $B=0$。

(ii): $(\alpha,\alpha)<(\beta,\beta)$。於是 $(\alpha+\beta,\alpha+\beta)=(\alpha,\alpha)$ 或 (β,β)（由 (b)），任何一種情形都使得 $(\alpha,\beta)<0$（因此 $<\alpha,\beta><0$）。依此，$(\beta-\alpha,\beta-\alpha)>(\beta,\beta)>(\alpha,\alpha)$，所以 $\beta-\alpha\notin\Phi$（再應用

(b))，即 $r=0$。如前，$<\alpha,\beta><\beta,\alpha>=0,1,2,$ 或3，不過在此我們有 $|<\alpha,\beta>|<|<\beta,\alpha>|$ 這使得 $<\alpha,\beta>=-1$ 0 或1。然而我們知道 $<\alpha,\beta><0$，所以 $<\alpha,\beta>=-1$。由 (a)，$q=-<\beta,\alpha>=\dfrac{<\beta,\alpha>}{<\alpha,\beta>}=\dfrac{(\beta,\beta)}{(\alpha,\alpha)}$，因此 $B=0$。

25.2. Chevalley 基底的存在性

引理 令 α，β 爲獨立根。選取 $x_\alpha\in L_\alpha, x_{-\alpha}\in L_{-\alpha}$ 使得 $[x_\alpha x_{-\alpha}]=h_\alpha$，並且令 $x_\beta\in L_\beta$ 爲任意的。那麼如果 $\beta-r\alpha,\cdots\cdots,\beta+q\alpha$ 是通過 β 的 α 鏈，我們有：$[x_{-\alpha}[x_\alpha x_\beta]]=q(r+1)x_\beta$（對於 h_α 的定義可參考命題 8.3）。

證明 如果 $\alpha+\beta\notin\Phi$，則 $q=0$ 而且 $[x_\alpha x_\beta]=0$，所以上面的等式的兩端都是0。一般說來，我們能够在 L 上展示 $S_\alpha(\cong sl(2,\mathbf{F}))$ 的正則表現這正和我們在（22.2）中爲任意表現所做的情形一樣。即由 x_β 生成的 S_α 子模其維數是 $r+q+1$（過 β 的 α 鏈所含的根的個數），最高權是 $r+q$。依引理 7.2 的記號，x_β 是 v_q 的（非零）倍數，而且在連續地應用 $ad_\alpha, ad_{-\alpha}$ 之後，其結果是對 v_q（因此也對 x_β）乘以 $q(r+1)$。

命題 我們可以選取根向量 $x_\alpha\in L_\alpha$（$\alpha\in\Phi$）滿足：

(a) $[x_\alpha x_{-\alpha}]=h_\alpha$

(b) 如果 $\alpha,\beta,\alpha+\beta\in\Phi,[x_\alpha x_\beta]=c_{\alpha\beta}x_{\alpha+\beta}$，則 $c_{\alpha\beta}=-c_{-\alpha,-\beta}$。

對於這樣選取的任何根向量，純量 $c_{\alpha\beta}(\alpha,\beta,\alpha+\beta\in\Phi)'$ 自動地滿足：

(c) $c_{\alpha\beta}{}^2=q(r+1)\dfrac{(\alpha+\beta,\alpha+\beta)}{(\beta,\beta)}$，其中 $\beta-r\alpha,\cdots\cdots,\beta+q\alpha$ 是過 β 的 α 鏈

證明 複習命題 14.3 知 L 有一自同構 σ，$\sigma^2=1$，它將 L_α 送至 $L_{-\alpha}(\alpha\in\Phi)$ 而且在 H 上的作用跟乘以常數 -1 是一樣的。對於任何

非零 $x_\alpha \in L_\alpha, x_{-\alpha}=-\sigma(x_\alpha)\in L_{-\alpha}$ 也是非零，而且 $\kappa(x_\alpha, x_{-\alpha})\neq 0$（$\kappa$ 是 Killing 形式）。以 cx_α 取代 $x_\alpha(c\in \mathbf{F})$ 則 $\kappa(cx_\alpha, cx_{-\alpha})=c^2\kappa(x_\alpha, x_{-\alpha})$。因爲 $\mathbf{F}$ 是代數封閉的所以只要調整 x_α 的選取可使 $\kappa(x_\alpha, x_{-\alpha})$ 取任何選定的非零值。我們選定 $\kappa(x_\alpha, x_{-\alpha})=\frac{2}{(\alpha,\alpha)}$。根據命題 8.3(c)，這使得 $[x_\alpha, x_{-\alpha}]=h_\alpha\left(=\frac{2t_\alpha}{(\alpha,\alpha)}\right)$。對於每一對根 $\{\alpha,-\alpha\}$，我們固定這樣的一個選擇 $\{x_\alpha, x_{-\alpha}\}$，所以 (a) 就得證。

現在令 $\alpha, \beta, \alpha+\beta\in\Phi$，所以 $[x_\alpha x_\beta]=c_{\alpha\beta}x_{\alpha+\beta}, c_{\alpha\beta}\in\mathbf{F}$。把 σ 應用在此等式上，我們得 $[-x_{-\alpha}, -x_{-\beta}]=-c_{\alpha\beta}x_{-\alpha-\beta}$。他方面，$[x_{-\alpha}, x_{-\beta}]=c_{-\alpha,-\beta}x_{-\alpha-\beta}$，所以 (b) 就得證。

在選定滿足 (a), (b) 的根向量之後，考慮以下的情況 $\alpha, \beta, \alpha+\beta\in\Phi$（特別，$\alpha$ 跟 β，因此 t_α 跟 t_β（參考 (8.2)），是線性獨立）。因爲 $t_{\alpha+\beta}=t_\alpha+t_\beta$，所以由 (a) 得 $[c_{\alpha\beta}x_{\alpha+\beta}, c_{\alpha\beta}x_{-\alpha-\beta}]=c_{\alpha\beta}{}^2h_{\alpha+\beta}=\frac{2c_{\alpha\beta}{}^2}{(\alpha+\beta,\alpha+\beta)}(t_\alpha+t_\beta)$。他方面，(b) 使得左端也等於 $-[[x_\alpha x_\beta][x_{-\alpha}x_{-\beta}]]=-[x_\alpha[x_\beta[x_{-\alpha}x_{-\beta}]]]+[x_\beta[x_\alpha[x_{-\alpha}x_{-\beta}]]]=[x_\alpha[x_\beta[x_{-\beta}x_{-\alpha}]]]+[x_\beta[x_\alpha[x_{-\alpha}x_{-\beta}]]]$。令通過 α 的 β 鏈是 $\alpha-r'\beta, \cdots\cdots, \alpha+q'\beta$。則以上的引理可以應用到每一項（在以 $-\alpha-\beta$ 取代 α, β 之後，這不會影響 r, q, r', q'）就得：$q'(r'+1)[x_\alpha x_{-\alpha}]+q(r+1)[x_\beta x_{-\beta}]=\frac{2q'(r'+1)}{(\alpha,\alpha)}t_\alpha+\frac{2q(r+1)}{(\beta,\beta)}t_\beta$。比較這些係數跟上面的那些係數，並且利用 t_α 跟 t_β 的線性獨立關係，我們得 (c)。

現在我們可以造 L 的 Chevalley 基底。這依定義是任何基底 $\{x_\alpha, \alpha\in\Phi; h_i, 1\leq i\leq l\}$ 其中 x_α 滿足前一命題的 (a), (b)，同時 $h_i=h_{\alpha_i}$ 其中 $\alpha_i\in\Delta=\{\alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_n\}$，$\Phi$ 的一組基底。

定理（**Chevalley**）令 $\{x_\alpha, \alpha\in\Phi; h_i, 1\leq i\leq l\}$ 爲 L 的一組 Che-

valley 基底。則所得的結構常數都是整數。更正確的說法是:

(a) $[h_i, h_j]=0$, $1\leq i$, $j\leq l$。

(b) $[h_i, x_\alpha]=<\alpha, \alpha_i>x_\alpha$, $1\leq i\leq l$, $\alpha\in\Phi$。

(c) $[x_\alpha, x_{-\alpha}]=h_\alpha$ 是 $h_1, \cdots\cdots, h_l$ 的一個 **Z** 線性組合。

(d) 如果 α, β 是獨立根, $\beta-r\alpha, \cdots\cdots, \beta+q\alpha$ 是過 β 的 α 鏈,則當 $q=0$ 時, $[x_\alpha, x_\beta]=0$, 同時如果 $\alpha+\beta\in\Phi$, 則 $[x_\alpha, x_\beta]=\pm(r+1)x_{\alpha+\beta}$。

證明 (a) 是顯然的, 同時(b) 可由 $\alpha(h_i)=<\alpha, \alpha_i>$ 這一事實獲得。至於 (c), 我們記得對偶根$\alpha^\vee=\frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)}$形成一個根系, 以 $\Delta^\vee=\{\alpha_1^\vee, \cdots\cdots, \alpha_l^\vee\}$ 爲基底(習題 10.1)。H跟 H^* 在 Killling 形式下認同, 而且 t_α 對應α, h_α 對應 $\alpha^\vee$。因爲 $\alpha^\vee$ 是 $\Delta^\vee$ 的一個 **Z** 線性組合, 所以每一 h_α 是 $h_1, \cdots\cdots, h_l$ 的一個 **Z** 線性組合。最後, 由前一命題的 (c) 跟定理 25.1 的 (c) 的組合就得到 (d)。

對讀者來說, 也許會覺得很奇怪, 因爲在我們的 Chevalley 基底的定義中我們寧可要求 $c_{\alpha\beta}=-c_{-\alpha,-\beta}$ 而不是 $c_{\alpha\beta}=c_{-\alpha,-\beta}$。然而這個反對稱是顯然的: 給定命題的條件 (a), 我們能够在熟練的利用 Jacobi 恆等式之下證明 $c_{\alpha\beta}c_{-\alpha,-\beta}=-(r+1)^2$, 它使得定理的條件 (d) 不能成立除非我們也有命題的條件 (b)。(這是 Chevalley 的原來論證方式。) 讀者應當驗證在 (1.2) 中所給的古典代數的基底在適當的修正之後就可得到 Chevalley 基底(習題 2)。Chevalley 定理的特性是對 Chevalley 基底的存在性提供一個均勻的證明, 同時特別指出結構常數是如何地從根系中產生出來。

25.3. 唯一性的問題

Chevalley 基底的唯一性能做到怎樣的程度? 一旦Δ是固定的。則 h_i 是完全地決定了。他方面, 我們對 x_α 的選取方式做一些改變

是很可能的。譬如說。以 $\eta(\alpha)x_\alpha$ 取代 $x_\alpha(\alpha\in\Phi)$。則 $[\eta(\alpha)x_\alpha,\eta(-\alpha)x_{-\alpha}]=\eta(\alpha)\eta(-\alpha)h_\alpha$，所以我們必須要求 (*)$\eta(\alpha)\eta(-\alpha)=1$ 才能滿足命題 25.2 的條件 (a)。如果α，β，$\alpha+\beta\in\Phi$，則 $[\eta(\alpha)\eta(\beta)x_\beta]=\eta(\alpha)\eta(\beta)[x_\alpha,x_\beta]=c_{\alpha\beta}\eta(\alpha)\eta(\beta)x_{\alpha+\beta}=c_{\alpha\beta}'\eta(\alpha+\beta)x_{\alpha+\beta}$，在此 $c_{\alpha\beta}'=\dfrac{c_{\alpha\beta}\eta(2)\eta(\beta)}{\eta(\alpha+\beta)}$。為了滿足命題 25.2 的 (b)，利用 (*)，做同樣的計算證明了我們也必須有 $c_{\alpha\beta}'=\dfrac{c_{\alpha\beta}\eta(\alpha+\beta)}{\eta(\alpha)\eta(\beta)}$，或者，換句話說。(**)$\eta(\alpha)\eta(\beta)=\pm\eta(\alpha+\beta)$。反之，任何函數 $\eta:\Phi\longrightarrow\mathbf{F}$ 如會滿足 (*) 跟 (**) 就都能夠用來調整 x_α 的選取方式。

關於正負號的問題是一個比較細膩的問題。我們有 $[x_\alpha x_\beta]=\pm(r+1)x_{\alpha+\beta}$ $(\alpha,\beta,\alpha+\beta\in\Phi)$，但是在用來建立這個等式的討論中，對正負號的選取並未定下來。這並不是意外的事，因爲讀者不難看到在 $sl(3,\mathbf{F})$ 中選取 $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 爲 Chevalley 基底的一部分是都可以的；並沒有任何理由說選取其中一個會比另一個好。我們也確實有一個僅知道Φ就能對符號做一致的選取的方法，而這方法也導出同構定理 (14.2, 18.4) 的另一個證明(參考這一節的附註)。當然這樣的一個證明是在繞圈子的，除非自同構 σ 的存在性是獨立地建立起來!

在此我們給以一註解，那就是我們也能夠經由乘法表的建構然後再驗證 Jacobi 恆等式的方式證明L的存在性 (18.4)。Tits 曾經寫下這樣的一個證明(看以下的附註)；雖然這種證明在本質上是基本的，但是它跟 Serre 定理 (18.4) 的證明比起來是太長了一些。

25.4. 簡化成質數體

L中的 Chevalley 基底 $\{x_\alpha,h_i\}$ 的衍生物 $L(\mathbf{Z})$ 是L中的一個格子，它跟Δ的選取無關。在承襲L的括弧運算下它甚而是佈於 $\mathbf{Z}$ 上

的一個李代數（在顯然的意味之下）。注意，定理 25.2 保證了封閉性。如果 $\mathbf{F}_p=\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ 是一個質數體而其特徵數是 p，則可定義張量乘積 $L(\mathbf{F}_p)=L(\mathbf{Z})\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{F}_p$: $L(\mathbf{F}_p)$ 是佈於 $\mathbf{F}_p$ 上的一個向量空間，以 $\{x_\alpha\otimes 1, h_i\otimes 1\}$ 爲其基底。不僅如此，$L(\mathbf{Z})$ 中的運算在 $L(\mathbf{F}_p)$ 上引出一個自然李代數結構。乘法表在實質上是與定理 25.2 中所給的一個一樣，只是將整數化成取模 p 的整數。

如果$\mathbf{K}$是 $\mathbf{F}_p$ 的擴張體則 $L(\mathbf{K})=L(\mathbf{F}_p)\otimes_{\mathbf{F}_p}\mathbf{K}=L(\mathbf{Z})\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{K}$同時承襲了 $L(\mathbf{F}_p)$ 的基底跟李代數結構。在此方式下，我們對 $(L,\mathbf{K})$ 結合着一個佈於$\mathbf{K}$上的李代數，它的結構跟L的結構是一樣的。我們稱 $L(\mathbf{K})$ 是一 Chevalley 李代數。卽使 $L(\mathbf{Z})$ 是決定於根向量 x_α 的選取，我們容易看出（習題 5）它的定義在同構的關係下（佈於 $\mathbf{Z}$ 上）是只由L決定的；同理，代數 $L(\mathbf{K})$（同構下）只決定於 $(L,\mathbf{K})$ 而已。

爲了說明這些，我們考慮 $L=sl(l+1,\mathbf{F})$。顯然 $L(\mathbf{K})$，有一個乘法表正好跟 $sl(l+1,\mathbf{K})$ 關於標準基底的乘法表是一樣的。所以 $L(\mathbf{K})\cong sl(l+1,\mathbf{K})$。在由 $\mathbf{F}$ 轉變成 $\mathbf{K}$ 時，唯一眞的會改變的是 $L(\mathbf{K})$ 可能不再是單純了：在此，一旦 $char\mathbf{K}$ 除盡 $l+1$ 則 $L(\mathbf{K})$ 就有一維的中心，它是由純量矩陣組成的（參考習題 2-3 跟以下的習題 8）。

25.5. （正則型）Chevally 羣的建構

命題，令 $\alpha\in\Phi, m\in\mathbf{Z}^+$。則 $(ad\,x_\alpha)^m/m!$ 保持 $L(\mathbf{Z})$ 不變。

證明 只要證明 Chevalley 基底的每一元素都被送回 $L(\mathbf{Z})$ 就足夠了。我們有 $(ad\,x_\alpha)(h_i)=[x_\alpha h_i]=-\langle\alpha,\alpha_i\rangle x_\alpha\in L(\mathbf{Z})$，同時 $(ad\,x_\alpha)^m/m!(h_i)=0$ 對所有的 $m\geq 2$ 是成立的。同理，$(ad\,x_\alpha)(x_{-\alpha})=h_\alpha\in L(\mathbf{Z})$。$(ad\,x_\alpha)^{2/2}$ $(x_{-\alpha})=\frac{1}{2}[x_\alpha h_\alpha]=-x_\alpha\in L(\mathbf{Z})$ 而且

$\frac{(ad\,x_\alpha)^m}{m!}(x_{-\alpha})=0$ 對所有的$m\geq 3$成立。當然，$\frac{(ad\,x_\alpha)^m}{m!}(x_\alpha)=0$ 對所有的$m\geq 1$是成立的。現在只剩下考慮基底元素 x_β, $\beta\neq\pm\alpha$。如果 $\beta-r\alpha,\cdots\cdots,\beta+q\alpha$ 是過 β 的 α 鏈，那麼爲 $\beta+\alpha$，$\beta+2\alpha,\cdots\cdots,\beta+q\alpha$ 諸根扮演 r 的角色的整數分別是 $r+1$, $r+2,\cdots\cdots$, $r+q$。所以，

$$\frac{(ad\,x_\alpha)^m}{m!}(x_\beta)=\begin{cases}\pm\dfrac{(r+1)(r+2)\cdots\cdots(r+m)}{m!}x_{\beta+m\alpha}\\ 0,\ \text{如果}\ \beta+m\alpha\notin\Phi\end{cases}$$

係數正好牽涉到二項式係數$\binom{r+m}{m}$，所以右端是 $x_{\beta+m\alpha}$ 的一個整數倍。

此命題有以下的重要意義。在正則表現下，L是L的一個模，而且 $L(\mathbf{Z})$ 是L中的一個格子其在自同態 $(ad\,x_\alpha)^m/m!$ 的作用下保持不變，因而也在 $exp\ ad\,x_\alpha=1+ad\,x_\alpha+(ad\,x_\alpha)^2/2!+\cdots\cdots$（因爲 $ad\,x_\alpha$ 是冪零，所以此和是有限的）的作用下保持不變。關於 Chevalley 基底，$Int L=G$能够看成是矩陣羣。由一切的$exp\ adcx_\alpha(\alpha\in\Phi, c\in\mathbf{Z})$ 生成的子羣保持 L 不變，因此是由整係數的矩陣（行列式爲 1 ）所組成的。特別，如果p是一質數，$\mathbf{F}_p$是有p個元的質數體，則將矩陣的全體元素取模p就得佈於 $\mathbf{F}_p$ 上的一個矩陣羣它作用在李代數 $L(\mathbf{F}_p)$ 上看成是一個自同構羣，記爲 $G(\mathbf{F}_p)$。

更一般地，令T爲一未知數。由所有的 $exp\ adTx_\alpha(\alpha\in\Phi)$ 生成的矩陣羣包含所有的矩陣其元素是落在 $\mathbf{Z}[T]$ 中（而且行列式爲 1 ），所以當選取T爲 $\mathbf{F}_p$ 的任一個擴張體 $\mathbf{K}$ 中的元素就得到一個佈於 $\mathbf{K}$ 上的一個矩陣羣 $G(\mathbf{K})$。這樣的一個羣就叫(正則型的)Chevalley 羣。當 $\mathbf{K}$是有限時，羣也是有限的而且（除了一些特例之外）是單純的；由於證明了這一件事使得 Chevalley 能够舉出一些以前所未見到的有限單羣族。

習　題

1. 試由秩 2 的根系的調查證明命題 25.1(c)。〔注意，可以假定α或β是單純的。〕

2. 如何修正(1.2) 中所列的古典代數的基底使得我們能够獲得 Chevalley 基底？〔參考習題 14.7。〕

3. 試利用命題 25.2 的證明重新證明習題 9.10 的主張。

4. 如果在Φ的每一分量中只有一種根長出現（即Φ有A, D, E型的既約分量），試證定理 25.2 中所有的 $c_{\alpha\beta}=\pm 1$（當 $\alpha, \beta, \alpha+\beta\in\Phi$）。

5. 試證即使L的 Chevalley 基底的取法有所不同，所得的李代數 $L(\mathbf{Z})$ 在$\mathbf{Z}$上都是同構的。（「在$\mathbf{Z}$上是同構」的意思是跟體上的同構一樣的。）

6. 對於 B_2 型的代數，令α，β，$\alpha+\beta$，$2\beta+\alpha$表示正根。

試驗證以下的等式正好是由 Chevalley 基底所得的結果（特別，符號$\pm$是一致的）：

$$
\begin{array}{ll}
[h_\beta, x_\beta]=2x_\beta & [x_\beta, x_\alpha]=x_{\alpha+\beta} \\
[h_\beta, x_\alpha]=-2x_\alpha & [x_\beta, x_{\alpha+\beta}]=2x_{2\beta+\alpha} \\
[h_\beta, x_{\alpha+\beta}]=0 & [x_3, x_{-\alpha-\beta}]=-2x_{-\alpha} \\
[h_\beta, x_{2\beta+\alpha}]=2x_{2\beta+\alpha} & [x_\beta, x_{-2\beta-\alpha}]=-x_{-\alpha-\beta} \\
[h_\alpha, x_\beta]=-x_\beta & [x_\alpha, x_{-\alpha-\beta}]=x_{-\beta} \\
[h_\alpha, x_\beta]=2x_\alpha & [x_{\alpha+\beta}, x_{-2\beta-\alpha}]=x_{-\beta} \\
[h_\alpha, x_{\alpha+\beta}]=x_{\alpha+\beta} & [h_\alpha, x_{2\beta+\alpha}]=0
\end{array}
$$
。

7. 令$\mathbf{F}=\mathbf{C}$。固定 L 的一組 Chevalley 基底，而且令 L' 是在L中由元素 $\sqrt{-1}\,h_i$ $(1\leq i\leq l)$, $x_\alpha-x_{-\alpha}$ 及 $\sqrt{-1}(x_\alpha+x_{-\alpha})$ $(\alpha\in\Phi^+)$ 生成的$\mathbf{R}$子空間。試證這些元素形成L佈於 $\mathbf{C}$ 上的一組基底（

所以$L\cong L'\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$）而且 L' 在括弧的運算下是封閉的（所以 L' 是佈於$\mathbf{R}$上的一個李代數）。試證 L' 的 Killing 形式 κ' 正好是 κ 在 L' 上的限制而且 κ' 是負定向的。（L' 是 L 的一個緊緻實形，它跟一個緊緻李羣相結合。）

8. 令 $L=sl(l+1,\mathbf{F})$，而且$\mathbf{K}$是特徵 p 的任意體。如果 $p\nmid l+1$，則 $L(\mathbf{K})$ 是單純的。如果 $p=2$，$l=1$，則 $L(\mathbf{K})$ 是可解的。如果 $l>1$，$p|l+1$，則 $Rad\,L(\mathbf{K})=Z(L(\mathbf{K}))$ 是由純量矩陣組成的。

9. 試證對 A_l 型的L，其所得的正則型的 Chevalley 羣 $G(\mathbf{K})$ 跟 $PSL(l+1,\mathbf{K})=SL(l+1,\mathbf{K})$ 純量矩陣是同構，其中純量是 1 在$\mathbf{K}$中的第 $l+1$ 次根。

10. 令L是 G_2 型，$\mathbf{K}$是特徵 3 的體。試證 $L(\mathbf{K})$ 有 7 維理想 M（參考短根）。試描述 $L(\mathbf{K})$ 在 $L(\mathbf{K})/M$ 上的表現。

11. Chevalley 羣 $G(\mathbf{K})$ 在 $L(\mathbf{K})$ 上的作用跟李代數的自同構羣一樣。

12. 在（19.3）中所列出的 G_2 基底是否是一組 Chevalley 基底。

附　註

這一節的主要構想都是由 Chevalley 的書報討論的文章〔3〕發展出來的。我們的處理方式是採用 Steinberg 的筆記〔2〕，它是有關 Chevalley 羣的種種資料的最好來源。Carter〔1〕，Curtis〔1〕對有限羣有很好的縱覽。Samelson〔1〕, p. 54，對Chevalley基底的符號的選取方法有所描述。Tists〔1〕有一個基於符號的詳盡（卻是基礎）的研討而建立的定理。

26. Kostant 定理

L, H, Φ, Δ如前。也固定L的一組 Chevalley 基底 $\{x_\alpha, \alpha\in\Phi, h_i, 1\leq i\leq l\}$。

爲了要造跟L的任意表現ϕ（不只是正則的）相結合的矩陣羣之故，我們必須在 $\mathscr{U}(L)$ 的內部努力一番。主要的構想是要在任意（有限維）的L 模中造一個跟 $L(\mathbf{Z})$ 類似的格子，使它在所有的自同態$\phi(x_\alpha)^m/m!$ 作用下保持不變。這樣的建構將會利用 $\mathscr{U}(L)$ 的一個「$\mathbf{Z}$形」，結果它正好是在 $\mathscr{U}(L)$中由 1 跟所有的 $x_\alpha{}^m/m!(\alpha\in\Phi($ 生成的子環。

26.1. 一個組合引理

我們知道二項式係數$\binom{n}{k}=\dfrac{n(n-1)\cdots\cdots(n-k+1)}{k!}$。如果以任何交換且結合的$\mathbf{F}$代數（具么元）的一個元素$x$取代$n$則所得的式子還是有意義而且能够記爲$\binom{x}{k}$ $k\in\mathbf{Z}^+$。對於大家熟悉的二項式恆等式 (*) $\binom{n+1}{k}-\binom{n}{k}=\binom{n}{k-1}$來說，在這情形下還是成立的。像往常一樣，當$k$是負數時，$\binom{n}{k}$解釋爲 0，同時$\binom{n}{0}=1$。

引理 令 $T_1,\cdots\cdots,T_l$ 是不定的，而且令$f=f(T_1,\cdots\cdots,T_l)$ 是佈於$\mathbf{F}$上的一個多項式而且當 $(n_1\cdots\cdots,n_l)\in\mathbf{Z}$ 時，$f(n_1,\cdots\cdots,n_l)\in\mathbf{Z}$。則$f$是多項式$\binom{T_1}{b_1}\binom{T_2}{b_2}\cdots\cdots\binom{T_l}{c_l}$ 的一個整係數線性組合，其中 $b_1,\cdots\cdots,b_l,\in\mathbf{Z}^+$ 而且 b_i 不會比f（看成是 T_i 的多項式）的次數高。

證明 首先應注意的一件事就是引理的結論是合理的，因爲當T_i 被一整數取代時

$$\binom{T_i}{b_i}=\frac{T_i(T_i-1)\cdots\cdots(T_i-b_i+1)}{b_i!}$$

確實是一整數。同時也注意一下，上面所指的多項式構成 $\mathbf{F}[T_1,\cdots\cdots,T_l]$ 的一組 $\mathbf{F}$ 基底。

我們將歸納法用在 l 及 f 的 T_l 的次數上。如果 f 是一個常多項式，它必是 $1=\binom{T_l}{0}$的一個整數倍，所以沒什麼好證明的。一般，記 $f=\sum_{k=0}^{r}f_k(T_1,\cdots\cdots,T_{l-1})\binom{T_l}{k}$，其中 r 是 f 的 T_l 的次數而且 $f_k(T_1,\cdots\cdots,T_{l-1})\in\mathbf{F}[T_1,\cdots\cdots,T_{l-1}]$。形式上，我們在這等式的兩端以 T_{l+1} 代替 T_l 並且減去原式。以上的等式 (*) 證明右端等於 $\sum_{k=0}^{r}f_k(T_1,\cdots\cdots,T_{l-1})\binom{T_l}{k-1}$，同時左端是一多項式它滿足 f 的原來假設。重複這過程 r 次，直到右端的二項式係數除了$\binom{T_l}{r-r}=1$ 以外全都為 0，$\binom{T_l}{r-r}$是 $f_r(T_1,\cdots\cdots,T_{l-1})$ 的係數。現在 f_r 滿足 f 的假設（它在 $\mathbf{Z}^{l-1}$ 上取整數值），但它的變數的個數比 f 的少一個。由歸納法假設，f_r 能够表成所要的形式。不僅如此，$f-f_r(T_1,\cdots\cdots,T_{l-1})\binom{T_l}{r}$滿足 f 的原來假設，但其 T_l 的次數$<r$，因此再應用歸納法的假設就完成證明。

26.2. 特別情形 $sl(2,\mathbf{F})$

在這一小節中我們考慮特別情形 $L=sl(2,\mathbf{F})$ 及其標準 (Chevalley) 基底 x，y，h。以下的引理及系等於是 Kostant 的定理的特別情形；這將在以下用來求得一般情形。

引理 如果 a，$c\in\mathbf{Z}^+$，則在 $\mathscr{U}(L)$ 中我們有:

$$\frac{x^c y^a}{c!a!}=\sum_{k=0}^{min(a,c)}\frac{y^{a-k}}{(a-k)!}\binom{h-a-c+2k}{k}\frac{x^{c-k}}{(c-k)!}。$$

證明 如果 $a=0$ 或 $c=0$，右端(各別的)變成 $\frac{x^c}{c!}$ 或 $\frac{y^a}{a!}$。如果 $a=c=1$，等式變成 $xy=yx+h$（它是成立的）。一般，我們對 a，c 用歸納法處理。首先令 $c=1$，而且對 a 用歸納法得:

$$\frac{xy^a}{a!}=\frac{xy^{a-1}}{(a-1)!}\frac{y}{a}=\frac{y^{a-1}}{(a-1)!}\frac{xy}{a}+\frac{y^{a-2}}{(a-2)!}(h-a+2)\frac{y}{a}$$

$$=\frac{y^a x}{a!}+\frac{y^{a-1}h}{a!}+\frac{y^{a-1}h}{a(a-2)!}-\frac{2y^{a-1}}{a(a-3)!}$$

$$=\frac{y^a x}{a!}+\frac{y^{a-1}h}{(a-1)!}-\frac{y^{a-1}}{(a-2)!}=\frac{y^a x}{a!}+\frac{y^{a-1}}{(a-2)!}(h-a+1),$$

正如所求。利用這結果及對 c 用歸納法，立得引理。

系 對 $b\in\mathbf{Z}^+$，$\binom{h}{b}$是落在 $\mathscr{U}(L)$ 的一個子環中，此子環是由 $\frac{x^c}{c!}$ 及 $\frac{y^a}{a!}$ 所衍生的 $(a,c\in\mathbf{Z}^+)$。

證明 如 $b=0$ 則結果是顯然的，所以我們可對 b 做歸納。在引理中，取 $a=c=b$，則右端變成$\binom{h}{b}+\sum_{k=0}^{b-1}\frac{y^{b-k}}{(b-k)!}\binom{h-2b+2k}{k}\frac{x^{b-k}}{(b-k)!}$（而這落在 $\mathscr{U}(L)$ 中所指定的子環中）。令 $k<b$。多項式 $\binom{T-2b+2k}{k}$（T 是一不定數）顯然在整數上取整數值，所以引理 26.1 允許我們將此多項式寫成多項式 $\binom{T}{j}$，其中 $j\leq k(<b)$，的整係數線性組合。由歸納法假設我們知每一$\binom{h}{j}$都落在 $\mathscr{U}(L)$ 中指定的子環中，所以$\binom{h}{b}$也落在所指定的子環中。

26.3. 關於交換的引理

現在我們回到一般的情形。既然對於每一$\alpha\in\Phi$，三維單子代數S_α的標準基底可以取爲L的 Chevalley 基底的一部分，(26.2) 的結果可自由地應用到只牽涉$\pm\alpha$的情形。現在主要的問題是處理線性獨立根對。

引理 A　令V,W爲L模而A,B爲相關的子羣。如果A,B在所有的自同態$\frac{x_\alpha{}^t}{t!}(\alpha\in\Phi, t\in\mathbf{Z}^+)$的作用下保持不變，則$A\otimes B\subset V\otimes W$。

證明　先回憶一下，$x_\alpha\cdot(v\otimes w)=x_\alpha\cdot v\otimes w+v\otimes x_\alpha\cdot w$。利用二項式展開式，我們看到

$$\frac{x_\alpha{}^t}{t!}(v\otimes w)=\sum_{k=0}^{t}\left(\frac{x^k}{k!}v\otimes\frac{x_\alpha{}^{t-k}}{(t-k)!}\cdot w\right)。$$

如果$v\in A, w\in B$，則在右端的每一項因而落在$A\otimes B$中。

系　令$L(\mathbf{Z})$（如 (25.4)）爲L中所選的 Chevalley 基底的$\mathbf{Z}$線性組合的全體。於是對於$\alpha\in\Phi$，$t\in\mathbf{Z}^+$，$\frac{(ad\,x_\alpha)^t}{t!}$保持$L(\mathbf{Z})\otimes L(\mathbf{Z})\otimes\cdots\cdots\otimes L(\mathbf{Z})$不變。

證明　利用命題 25.5 與引理。

令Ψ爲Φ的一個子集合。如果$\alpha,\beta\in\Psi$，$\alpha+\beta\in\Phi$會導致$\alpha+\beta\in\Psi$，則稱Ψ是封閉的。例如：Φ; Φ^+; $\{i\alpha+j\beta\,|\,i,j\geq 0;\alpha,\beta$是線性無關的根$\}$都是。

引理 B　令Ψ爲一封閉根集，又$\Psi\cap-\Psi=\phi$。令$\mathfrak{X}$是在$\mathscr{U}(L)$中由所有的$x_\alpha{}^t/t!(\alpha\in\psi, t\in\mathbf{Z}^+)$生成的子環（具有么元）。對於$\Psi$的任何固定的次序，所有的乘積$\prod_{\alpha\in\psi}\frac{x_\alpha{}^{t_\alpha}}{t_\alpha!}$（以所給定的次序寫成的）組成的集合形成$\mathbf{Z}$模$\mathfrak{X}$的一組基底。

證明　顯然，$L_\alpha\,(\alpha\in\Psi)$生成$L$的一個子代數$X$；將$PBW$定理

應用於 $\mathscr{U}(X)$ 上，就證明上面所指的乘積確實形成$\mathfrak{X}$的一組佈於$\mathbf{F}$上的基底。所以只要證明所有的係數都落在$\mathbf{Z}$中就足够了。讓我們稱 $\sum\limits_{\alpha\in\Psi} t_\alpha$是 $\prod\limits_{\alpha\in\Psi}\frac{x_\alpha{}^{t\alpha}}{t_\alpha}$的次數。如果 $x\in\mathfrak{X}$ 是非純量，則$x=c\prod\frac{x_\alpha{}^\alpha}{t_\alpha!}+$（次數$\leq\sum t_\alpha$ 的項），其中$0\neq c\in\mathbf{F}$而且其餘的 $t\,(=\sum t_\alpha)$ 次項所包括的數列與（$\cdots\cdots t_\alpha\cdots\cdots$）相異。現在$\mathfrak{X}$（經由正則表現）作用於$L\otimes\cdots\cdots\otimes L$（$t$ 個）上。特別，我們看看$x\,(\underbrace{x_{-\alpha}\otimes\cdots\cdots\otimes x_{-\alpha}}_{t_\alpha}\otimes(\underbrace{x_{-\beta}\otimes\cdots\cdots\otimes x_{-\beta}}_{t_\beta})\otimes\cdots\cdots)(\alpha,\beta,\cdots\cdots)$。這個元素落在$H\otimes\cdots\cdots\otimes H$的成分（關於標準 PBX 基底）到底是什麼？由檢視 x 中的第一項，$c\prod\limits_\alpha\frac{x_\alpha{}^{t\alpha}}{t_\alpha!}$，得$c\,(\underbrace{h_\alpha\otimes\cdots\cdots\otimes h_\alpha}_{t_\alpha})\otimes(\underbrace{h_\beta\otimes\cdots\cdots\otimes h_\beta}_{t_\beta})\otimes\cdots\cdots)$。然而，$x$中的其他項$\prod\frac{t_\alpha{}^{u\alpha}}{u_\alpha!}$應用於以上的元素得不到在$H\otimes\cdots\cdots\otimes H$的非零成分；這是因爲因子太少（$\sum u_\alpha<\sum t_\alpha$），或者是雖然 $\sum u_\alpha=\sum t_\alpha$，但是因子分配不當。

現在引理A的系理說x保持 $L(\mathbf{Z})\otimes\cdots\cdots\otimes L(\mathbf{Z})$（$t$ 個）不變。不僅如此，$L(\mathbf{Z})$ 是與Δ的選擇無關，所以我們可以假定α（在Ψ中的第一個元素）是單的。諸 h_β（β是單的）形成自由 $\mathbf{Z}$ 模 $H(Z)=L(Z)\cap H$ 的一組基底，所以他們的各種張量積形成自由 Z 模$H(Z)\otimes\cdots\cdots\otimes H(Z)$ 的一組基底，他方面，我們剛剛已證明。$c\,((h_\alpha\otimes\cdots\cdots\otimes h_\alpha)\otimes(h_\beta\otimes\cdots\cdots\otimes h_\beta)\otimes\cdots\cdots)\in H(\mathbf{Z})\otimes\cdots\cdots\otimes H(\mathbf{Z})$這使得 $c\in\mathbf{Z}$ 是顯然的。現在可以由x減去$c\prod\frac{x_\alpha{}^{t\alpha}}{t_\alpha!}$ 而且對 $x-c\prod\frac{x_\alpha{}^{t\alpha}}{t_\alpha!}\in\mathfrak{X}$施以相同的論證。所以對項數做歸納就完成引理的證明。

爲了方便，在 $\mathscr{U}(L)$ 中讓我們稱元素$\frac{x_\alpha{}^t}{t!}$，$\binom{h_i-j}{k}$ $(j,k\in\mathbf{Z},t\in\mathbf{Z}^+)$ 的任何乘積爲單項式，其次數是等於出現的各種 t 的和。

引理C 令$\alpha,\beta\in\Phi$，$k,m\in\mathbf{Z}^+$。則 $\frac{x_\beta{}^m}{m!}\frac{x_\alpha{}^k}{k!}$ 是 $\frac{x_\alpha{}^k}{k!}\frac{x_\beta{}^m}{m!}$

以及其他次數小於 $k+m$ 的單項式的整係數線性組合。

證明 如果 $\alpha=\beta$ 就無須證明了。如果 $\alpha=-\beta$ 則由引理 26.2 即得。否則，α,β 是獨立的而我們就能够將引理 B 應用到形如 $i\alpha+j\beta(i,j\geq 0)$ 的根集上，將所給的單項式寫成 $\frac{x_\alpha{}^k}{k!}\ \frac{x_\beta{}^m}{m!}$ 以及其他單項式的整係數線性組合。現在只剩下證明其他的單項式的次數是 $<m+k$ 就可以了。但是 PBW 定理(17.3)已保證 $\frac{x_\beta{}^m}{m!}\ \frac{x_\alpha{}^k}{k!}=\frac{x_\alpha{}^k}{k!}\ \frac{x_\beta{}^m}{m!}$ + (PBW 基底元數的 $\mathbf{F}$ 線性組合其次數 $<k+m$)。既然我們是利用 PBW 基底（或是其純量倍），證明完成。

引理 D 令 $\alpha,\beta\in\Phi, f(T)\in\mathbf{F}[T]$（$T$ 是一不定數）。則對所有的 $k\in\mathbf{Z}^+, x_\alpha{}^k f(h_\beta)=f(h_\beta-k\alpha(h_\beta))x_\alpha{}^k$。

證明 依線性只要證明當 f 是 T^m 時此引理爲眞就可以了；所以我們的主張變成是: $x_\alpha{}^k x_\beta{}^m=(h_\beta-k\alpha(h_\beta))^m x_\alpha{}^k$。如果 $k=0$ 或 $m=0$ 則是顯然的。現在對 k 及 m 用歸納法。如果 $k=m=1$，我們有 $x_\alpha h_\beta=h_\beta x_\alpha-\alpha(h_\beta)x_\alpha=(h_\beta-\alpha(h_\beta))x_\alpha$ 正如所求。一般，先對 m 再對 $k\geq 1$ 用歸納法得 $x_\alpha{}^k h_\beta{}^m=(x_\alpha{}^k h_\beta{}^{m-1})h_\beta=(h_\beta-k\alpha(h_\beta))^{m-1}(x_\alpha{}^k h_\beta)=(h_\beta-k\alpha(h_\beta))^{m-1}(h_\beta-k\alpha(h_\beta))x_\alpha{}^k$。

26.4. Kostant 的定理的證明

固定 Φ^+ 的某一次序。以 $A=(a_1,\cdots\cdots,a_m), B=(b_1,\cdots\cdots,b_l)$ $C=(c_1,\cdots\cdots,c_m)$ 表示 m 個或 l 個的非負整數組。然後定義 $\mathscr{U}(L)$ 的元素如下

$$f_A=\frac{x_{-\alpha_1}{}^{a_1}}{a_1!}\cdots\cdots\frac{x_{-\alpha_m}{}^{a_m}}{a_m!},$$

$$h_B=\binom{h_1}{b_1}\cdots\cdots\binom{h_l}{b_l},$$

$$e_C=\frac{x_{\alpha_1}{}^{c_1}}{c_1!}\cdots\cdots\frac{x_{\alpha_m}{}^{c_m}}{c_m!}。$$

注意諸 h_B 形成 $\mathscr{U}(H)$ 佈於 $\mathbf{F}$ 上的一組基底: 實質上，這已在(26.1) 中解釋過了。將這結果跟 PBW 定理組合起來就證明了 $f_A\cdot h_B\cdot e_C$ 諸元素形成 $\mathscr{U}(L)$ 的一組 $\mathbf{F}$ 基底。

定理 (Kostant) 令 $\mathscr{U}(L)_{\mathbf{Z}}$ 是在 $\mathscr{U}(L)$ 中由所有的 $x_\alpha{}^t/t!(\alpha\in\Phi, t\in\mathbf{Z}^+$ 生成的子環（具有么元）。令$\mathscr{B}$是在 $\mathscr{U}(L)$ 中的格子其$\mathbf{Z}$基底是由所有的 $f_Ah_Be_C$ 組成的。則 $\mathscr{B}=\mathscr{U}(L)_{\mathbf{Z}}$ 。

證明 這只是組合，前面的片片斷斷的工作。首先由引理 26.2 的系知，每一$\binom{h_i}{b_i}\in\mathscr{U}(L)_{\mathbf{Z}}$。所以 $\mathscr{B}\subset\mathscr{U}(L)_{\mathbf{Z}}$ 。

反方向的包含較難證明。因爲諸單項式（定義如(26.3)）衍生Z模 $\mathscr{U}(L)_{\mathbf{Z}}$，所以我們只要證明這些單項式是落在$\mathscr{B}$中就可以了。爲此，我們利用數學歸納法。次數 0 的單項式只包括形式如$\binom{h_i-j}{k}$的因子，因而由引理26.1知其落在$\mathscr{B}$中。一般來說，(26.3) 的引理C跟D（以及歸納法假設）允許我們將一單項式寫成其他的單項式的整係數線性組合，這些單項式的因子包括 $x_{-\alpha}$，h_α 以及 x_α，$\alpha\in\Phi$ 而且是以一特定的次序排列的。恆等式$\frac{T^k}{k!}\ \frac{T^m}{m!}=\binom{m+k}{m}\frac{T^{k+m}}{(k+m)!}$ 更進一步保證每一 $x_{\pm\alpha}$ 在每一所得的單項式中至多只出現在其中的一項中。現在引理 26.1 跟 (26.3) 的引理D使我們完成整個證明。

習　題

1. 令$L=sl(2,\mathbf{F})$。令 $V(m)$ 如 (7.2) 中所造的是屬於最高權m的既約L模而且以 $(v_0, v_1, \cdots\cdots, v_m)$ 爲其基底。試證這組基底的整係數線性組合之全體在 $\mathscr{U}(L)_{\mathbf{Z}}$ 的作用下保持不變。令 $(w_0, w_1, \cdots\cdots, w_m)$ 是 $V(m)$ 在 (22.2) 中所用的基底。試證諸 w_i 的整係數線性組合之全體在 $\mathscr{U}(L)_{\mathbf{Z}}$ 的作用下並不是不變的。

2. 令 $\lambda\in\Lambda^+\subset H^*$ 爲一制囿整線性函數，而且回憶 (20.3) 的模 $Z(\lambda)$ 與既約商$V(\lambda)=Z(\lambda)/Y(\lambda)$。由 Kostant 定理，我能證明

$V(\lambda)$ 的一個權 μ 的重複數可以有效的計算如下：如果 v^+ 是 $Z(\lambda)$ 的一個極大向量，則 $\{f_A\cdot v^+ \mid \sum a_i\alpha_i=\lambda-\mu\}$ 形成 μ 在 $Z(\lambda)$ 中的權空間的一組 **F** 基底。（參考（24.1）的引理 D）。由此，如果 $\sum a_i\alpha_i=\sum c_i\alpha_i$，則 $e_C f_A\cdot v^+$ 是 $n_{CA}v^+$，其中 $n_{CA}\in\mathbf{Z}$。這就得一 $d\times d$ 整數矩陣 (n_{CA})（$d=\mu$ 在 $Z(\lambda)$ 的重複數），它的秩 $=m_\lambda(\mu)$。（參考習題 20.9）。不僅如此，一旦 Chevalley 基底結構常數決定之後，這個整矩陣是可計算的。對 A_2 型的代數，取 $\lambda-\mu$ 儘量小，試完成這種計算。

附　註

定理 26.4 可在 Kostant〔2〕中找到；在此我們是將 Steinberg〔2〕的證明重新改寫。至於相關的材料，譬如說由一「根本形式的」觀點來討論的可參考 Chevalley〔4〕，Borel〔2〕。習題 2 是取自 Burgoyne〔1〕。

27. 容許格子

記號如二十六節中所用的。利用 Kostant 的定理，我們將在一個任意的有限維 L 模的造一容許格子而且描述它在 L 中的穩定化子。取質數模就得到佈於任意質特徵數體上的線性羣及線性李代數，這就推廣了二十五節中所給的 Chevalley 羣跟 Chevalley 代數的造法。

27.1. 容許格子的存在性

由 Kostant 的定理（或在它之前的幾個引理）可得一結果那就是如果 $N^+=\coprod_{\alpha>0}L_\alpha, N^-=\coprod_{\alpha<0}L_\alpha$，則每一個 $\mathscr{U}(N^-),\mathscr{U}(H),\mathscr{U}(N^+)$ 都有一「**Z** 形」其基底是由 f_A, h_B, e_C 分別組成的。我們稱這些子環是 $\mathscr{U}_{\mathbf{Z}}^-,\mathscr{U}_{\mathbf{Z}}^0,\mathscr{U}_{\mathbf{Z}}^+$，所以 $\mathscr{U}_{\mathbf{Z}}(=\mathscr{U}(L)_{\mathbf{Z}})$ 等於 $\mathscr{U}_{\mathbf{Z}}^-\mathscr{U}_{\mathbf{Z}}^0\mathscr{U}_{\mathbf{Z}}^+$。

再提一個預備知識：我們已定義在一個佈於 **F** 上的有限維向量

空間V中的一個格子M是V的一組（佈於$\mathbf{F}$上）基底的整係數線性組合的全體。因爲$char\mathbf{F}=0$，所以V的一個有限生成子$\mathbf{Z}$模是自動地成爲一個有限秩的自由$\mathbf{Z}$模。所以對V中的一個格子我們可以給以另一個刻劃，那就是把它看成是在V中會生成全部的V的一個有限生成子羣（佈於$\mathbf{F}$上）而且其$\mathbf{Z}$秩$\leq dim_{\mathbf{F}}V$。

引理 令$d\in\mathbf{Z}^l$而$S\subset\mathbf{Z}^l$爲一不包含d的有限集合。則存在一個佈於$\mathbf{F}$上的多項式$f(T_1,\cdots\cdots,T_l)$使得$f(\mathbf{Z}^l)\subset\mathbf{Z}, f(d)=1$，而且$f(S)=0$。

證明 設$d=(d_1,\cdots\cdots,d_l)$。如果$k\in\mathbf{Z}^+$，置$f_k(T_1,\cdots\cdots,T_l)=\prod_{i=1}^{l}\binom{T_i-d_i+k}{k}\binom{-T_i+d_i+k}{k}$，所以$f_k(\mathbf{Z}^l)\subset\mathbf{Z}$（參考引理26.1），$f_k(d)=1$，在$\mathbf{Z}^l$中，考慮以$d$爲中心，以$2k$爲邊長的盒子。則$f_k$在此盒子上所取的函數值除了$d$以外都是0。所以只取足夠大的$k$使得這盒子能包含有限集$S$並且取$f=f_k$就可以了。

定理 令V是一有限維L模。則：(a) 在V中，任何在$\mathscr{U}_{\mathbf{Z}}$的作用下保持不變的任何子羣是等於它與V的各個權空間的交集的直和。

(b) V包含一個在$\mathscr{U}_{\mathbf{Z}}$的作用下保持不變的格子。

證明 (a) 令M是V的一個子羣其在$\mathscr{U}_{\mathbf{Z}}$的作用下保持不變。對V的每一權μ，置$d(\mu)=(\mu(h_1)\cdots\cdots,\mu(h_l))\in\mathbf{Z}^l$固定$V$的任一權$\lambda$。由前一引理得一個佈於$\mathbf{F}$上的多項式$f$使得$f(\mathbf{Z}^l)\subset\mathbf{Z}$, $f(d(\lambda))=1$, $f(d(\mu))=0$, $\mu\neq\lambda\in\Pi(V)$。置$u=f(h_1,\cdots\cdots,h_l)$。由引理26.1知$u\in\mathscr{U}_{\mathbf{Z}}{}^0$。顯然$u$在$V$上的作用正如投影$V\longrightarrow V_\lambda$一樣。特別，如果$v\in M$，它的$V_\lambda$分量$u\cdot v$也落在$M$中。

(b) 由Weyl的完全可約性定理，我們可以假定$V=V(\lambda)$ $(\lambda\in\Lambda^+)$即V是既約的。令$v^+\in V$爲一極大向量（其權爲λ），並且置$M=$

$\mathscr{U}_L^- \cdot v^+$。因爲在 $\mathscr{U}_{\mathbf{Z}}^+$ 的 $\mathbf{Z}$ 基底 $\{e_c\}$ 中除了 1 以外的所有元素都將 v^+ 送至 0，所以我們有 $\mathscr{U}_{\mathbf{Z}}^+ \cdot v^+ = \mathbf{Z}v^+$。又因爲 $\binom{h_i}{b_i}$ 在 v^+ 上的作用正如乘上一整數

$$\frac{\lambda(h_i)(\lambda(h_i)-1)\cdots\cdots(\lambda(h_i)-b_i+1)}{b_i!}$$

一樣，所以我們也有 $\mathscr{U}_{\mathbf{Z}}^0 \cdot v^+ = \mathbf{Z}v^+$。換句話說，$\mathscr{U}_{\mathbf{Z}} \cdot v^+ = \mathscr{U}_{\mathbf{Z}}^- \mathscr{U}_{\mathbf{Z}}^0 \mathscr{U}_L^+ \cdot v^+ = \mathscr{U}_{\mathbf{Z}}^-(\mathbf{Z}v^+) = M$，所以 M 在 $\mathscr{U}_{\mathbf{Z}}$ 的作用下保持不變。這論證也證明了 $M \cap V_\lambda = \mathbf{Z}v^+$。我們知道除了有限個 f_A 之外，其餘的都把 v^+ 送至 0，所以M是有限生成的。不僅如此，因爲 $\mathscr{U}_{\mathbf{Z}}^-$ 包含 $\mathscr{U}(N^-)$ 的一個 $\mathbf{F}$ 基底，同時 $\mathscr{U}(N^-)v^+ = V$，所以 M 在 $\mathbf{F}$ 上會衍生整個 V。

現在還須證明一件事，那就是 M 的 $\mathbf{Z}$ 秩不會超過 $dim_F V$。假定不然，並且在M中儘量取最少的向量使得他們既是自由地佈於 $\mathbf{Z}$ 上而又線性相依地佈於 $\mathbf{F}$ 上。我們說他們是 $v_1, v_2, \cdots\cdots, v_r \in M$，所以 $\sum_{i=1}^{r} a_i v_i = 0, a_i \in \mathbf{F}$。對於某一 $u \in \mathscr{U}_{\mathbf{Z}}$ 來說，$u \cdot v_1$ 必有非零的 V_λ 成分：否則v_1 必衍生 V 的一個眞 $\mathscr{U}(L)$ 子模，但這跟 V 的既約性不合。他方面，每一個 $u \cdot v_i (1 \le i \le r)$ 的 V_λ 成分都落在M中（由 (a)），因此是 v^+ 的一個整數倍，就說它是 $m_i v^+$（因爲 $M \cap V_\lambda = \mathbf{Z} \cdot v^+$ 之故）。所以 $\sum a_i v_i = 0$ 導致 $\sum a_i (u \cdot v_i) = 0$，所以 $\sum a_i m_i = 0$（但 $m_1 \neq 0$）。所以，$0 = m_1 \left(\sum_{i=1}^{r} a_i v_i \right) - \left(\sum_{i=1}^{r} a_i m_i \right) v_1 = \sum_{i=2}^{r} a_i (m_1 v_i - m_i v_1)$。向量 $m_1 v_i - m_i v_1 (2 \le i \le r)$ 落在M中而且顯然是自由地佈於 $\mathbf{Z}$ 上而且是線性無關地佈於 $\mathbf{F}$ 上。這與 r 的最小選擇不合，因而 M 是 V 中的一個格子而且在 $\mathscr{U}_{\mathbf{Z}}$ 的作用下保持不變。

一有限維 L 模 V 中的一個格子如果在 $\mathscr{U}_{\mathbf{Z}}$ 的作用下保持不變則稱爲容許的。定理的 (b) 部分主張這種格子的存在性；事實上，證明

中指出這種格子的造法。（如果V是旣約的，則包含一已知最大向量的最小格子就是我們所要找的。）(a) 部分導致$M=\coprod_{\mu\in\Pi(V)}(M\cap V_\mu)$。當然，當$V$是$L$本身時（卽取正則表現），那麼任一 Chevalley 基底的$\mathbf{Z}$衍生集就是一個容許格子 (25.5)

27.2. 容許格子的穩定化子

令V是一有限維L模。爲免於無聊我們假定V是信實的（換句話說，我們拋棄那些在V上有無聊作用的L的單理想）。那麼容易看出$\Pi(V)$ 的$\mathbf{Z}$衍生集，稱爲 $\Lambda(V)$，是落在 Λ 與根格子 Λ_r 之間（習題 21.5）。

利用定理 27.1，在V中選取一容許格子M，並且令L_V爲它在L中的穩定化子，$H_V=H\cap L_V$（在以下我們將證明 L_V 只與V有關而與M的選取無關，所以記號是不會顯得含糊不淸）。顯然，$L(\mathbf{Z})\subset L_V$ 而且 L_V 在括弧運算下是封閉的。由定理 27.1的 (a) 部分我們知道 $h\in H$ 保持M不變的意思是說對所有的 $\lambda\in\Pi(V)$（或$\Lambda(V)$），$\lambda(h)\in\mathbf{Z}$。這證明格子的包含 $\Lambda\supset\Lambda(V)\supset\Lambda_r$ 引出反包含 $H(\mathbf{Z})\subset H_V\subset H_0$，其中 $H_0=\{h\in H\mid\lambda(h)\in\mathbf{Z}\ \forall\lambda\in\Lambda_r\}$ 而且 $H(\mathbf{Z})=H\cap L(\mathbf{Z})$ ($=h_\alpha(\alpha\in\Phi)$ 全體的$\mathbf{Z}$衍生集)。特別，H_V 是H中的一個格子。我們的目標是證明 L_V 爲L中的一個容許格子。以下的引理是第一步工作。（它可以寫成是關於結合代數的一個事實，但我們只需要它的一個特例）

引理 如果$u\in\mathfrak{U}(L)$, $x\in L$，則在 $\mathfrak{U}(L)$ 中。

$$\frac{(\operatorname{ad}x)^n}{n!}(u)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{x^{n-i}}{(n-i)!}u\frac{x^i}{i!}$$

證明 當 $n=1$ 時這就讀做 $\operatorname{ad}x(u)=xu-ux$，而依定義這自然是成立的。現在對$n$利用歸納法。

$$\frac{(ad\,x)^n}{n!}(u)=\frac{ad\,x}{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\frac{x^{n-1-i}}{(n-1-i)!}u\frac{x^i}{i!}\right)$$

$$=\left(\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\frac{x^{n-i}}{n(n-1-i)!}u\frac{x^i}{i!}\right)$$

$$-\left(\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\frac{x^{n-1-i}}{(n-1-i)!}u\frac{x^{i+1}}{i!n}\right)。$$

在改變指標 $i\longrightarrow i-1$ 之後，第二個和讀成:

$$-\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\frac{x^{n-i}}{(n-i)!}u\frac{x^i}{(i-1)!n}。$$

對於 $0<i<n$，把第 i 項跟第一個和的第 i 項組合起來就得:

$$(-1)^i x^{n-i}ux^i\left(\frac{1}{n(n-1-i)!i!}+\frac{1}{n(n-i)!(i-1)!}\right)。$$

但是在括弧內的量正好是 $\frac{1}{(n-i)!i!}$。第 0 項跟第 n 項為 $\frac{x^n}{n!}u$ 跟 $(-1)^n u\frac{x^n}{n!}$，正如所求。

命題　L_V 是在 L 模中 L 的一個容許格子。不僅如此，$L_V=H_V+\coprod_{\alpha\in\Phi}\mathbf{Z}x_\alpha$；所以 L_V 只與 V（或 $\Lambda(V)$）有關，但與 M 的取法無關。

證明　我們知道 $L(\mathbf{Z})=H(\mathbf{Z})+\coprod\mathbf{Z}x_\alpha\subset L_V$，而且顯然 $H_V\subset L_V$。他方面，前一引理保證 L_V 在所有的 $(ad\,x_\alpha)^m/m!$ 作用下保持不變（因此在 $\mathscr{U}_L$ 的作用下也保持不變。）這使得我們能够把 L_V 寫成它跟 H 及 L_α 的交集的和（定理 27.1 的 (a) 部分），所以 $L_V=H_V+\coprod(L_V\cap L_\alpha)$，而且 $\mathbf{Z}x_\alpha\subset L_V\cap L_\alpha$。一旦我們能證明最後的包含關係對於每一個 α 來說事實上是等號關係則命題得證。

考慮線性映射 $\phi: L_\alpha\longrightarrow H$ 定義為 $x\longrightarrow[x_{-\alpha}x]$（$h_{-\alpha}$ 的倍數）。因為 $dim L_\alpha=1$ 而且 $[x_{-\alpha}L_\alpha]\neq 0$，所以此映射 ϕ 是一單射。如果將 ϕ 限制在 $L_V\cap L_\alpha$ 上則其像是落在 H_V 中（因為 L_V 在括弧運算下是封閉的而 $H_V=L_V\cap H$）。所以這個像是無限循環的，H_V 是是 H

中的一個格子（秩爲 l 而且是自由交換的）。設$\frac{1}{n}x_\alpha(n\in\mathbf{Z}^+)$是無限循環羣 $L_V\cap L_\alpha$ 的一個生成元：$x_\alpha\in L_V\cap L_\alpha$ 當然必須是生成元的整數倍。於是$\frac{(ad\,x_{-\alpha})^2}{2!}\left(\frac{x_\alpha}{n}\right)=\frac{x_{-\alpha}}{n}\in L_V$（因爲 L_V 在 $\mathscr{U}_L$ 的作用下保持不變），因而$-\left(ad\frac{x_\alpha}{n}\right)^2\left(\frac{x_{-\alpha}}{n}\right)=\frac{2x_\alpha}{n}\in L_V$（因爲 L_V 在括弧運算下是封閉的）。但是這一來，$\frac{2}{n^3}\in\frac{1}{n}\mathbf{Z}$，使得 $n=1$。這就證得 $L_V\cap L_\alpha=Z_{x\alpha}$ 如所求。

我們舉一例子。考慮 $L=sl(2,\mathbf{F})$ 並且以 (x, y, h) 爲標準基底。對於 L 的一般二維表現，$V=\mathbf{F}^2$，基底 $\{(1,0),(0,1)\}$ 顯然生成一容許格子，而且 $L_V=\mathbf{Z}h+\mathbf{Z}x+\mathbf{Z}y(=L(\mathbf{Z}))$。他方面，取 $L(\mathbf{Z})$ 爲 L 中的一個容許格子（對於 3 維表現 ad），我們求得 $L_V=\mathbf{Z}\left(\frac{h}{2}\right)+\mathbf{Z}x+\mathbf{Z}y$。這些極端情形對應到根系 A_1 的兩個可能的權格子 Λ, Λ_r（習題 4）。

27.3. 容許格子的種類

令 $V=V(\lambda)$ $(\lambda\in\Lambda^+)$ 爲一既約 L 模。對 V 中的容許格子的選擇有多少可能呢？由定理 27.1(a) 得知這樣的一個格子 M 必須包含一個極大向量 v^+，因此必須包含在定理 27.1(b) 的證明中所用的容許格子 $\mathscr{U}_{\mathbf{Z}}^-\cdot v^+=\mathscr{U}_{\mathbf{Z}}\cdot v^+$ 裡。因爲 v^+（依一純量倍數）是由 V 唯一決定的。所以在整個討論中我們可以固定 v^+ 並且以 M_{min} 表示這個極小的容許格子 $\mathscr{U}_{\mathbf{Z}}\cdot v^+$。現在我們如能知道哪些容許格子會在 $\mathbf{Z}v^+$ 中跟 V 相交就感到滿意了。

回憶一下對偶（或逆步）模的概念：V^* 是 V 的對偶向量空間，而 L 在 V^* 上的作用定義爲 $(x\cdot f)(w)=-f(x\cdot w)\,(x\in L, w\in V, f\in V^*)$。如果 X 是 V^* 的一個 L 不變子空間，則在 V 中相應的子空間 $X^\perp$ 也是 L 不變，所以 V^* 也是既約的。事實上，我們能指定

它的最高權（習題 21.6）: 令 $\sigma \in \mathscr{W}$ 把Δ送至$-\Delta$（因此把 Φ^+ 送至 Φ^-），而且令 $w \in V$ 爲一非零向量其權爲 $\sigma\lambda$。所以 w 是一「極小向量」，它被所有的 $x_{-\alpha}$ 送至 0。當然，$dim V_{\sigma\lambda} = dim V_\lambda = 1$，所以實質上，$w$ 是唯一的。在 V 中，對於由 w 及其他權向量組成的一組基底，取 f^+ 是對偶於 w 的線性函數。則 f^+ 是 V^* 的一個極大向量，其權爲 $-\sigma\lambda$，而且 $V^* \cong V(-\sigma\lambda)$。

現在令 M 爲 V 中的容許格子。定義 $M^* = \{f \in V^* | f(M) \subset \mathbf{Z}\}$ 如果 M 是 V 的某一組基底的 $\mathbf{Z}$ 衍生集，則 M^* 顯然是對偶基底的衍生集。特別，M^* 是一個格子。它甚至是容許的: $v \in M$, $f \in M^*$ 導致 $((x_\alpha{}^m/m!) \cdot f)(v) = \pm f((x_\alpha{}^m/m!) \cdot v) \in \mathbf{Z}$。又 V 中的兩個容許格子的包含關係 $M_1 \subset M_2$ 會引出一個反包含關係 $M_1{}^* \supset M_2{}^*$ 也是明顯的。

現在假定 v^+（因而 M_{min}）是固定的。則有一個自然的方式來選取 $V_{\sigma\lambda} \cap M_{min}$ 的一個極小向量。現在注意一下，在定理 21.2 的證明中的步驟 (5) 所建構的 Weyl 鏡射是 V 的變換，他們是 $\mathscr{U}_\mathbf{Z}$ 的元素；特別，σ 把 $\mathbf{Z}v^+$ 映上 $M_{min} \cap V_{\sigma\lambda}$。我們可以定義 w 是 v^+ 的像，而且接着取 $f^+ \in V_{-\sigma\lambda}{}^*$ 如上（關於 M_{min} 的一組基底的對偶基底的一部分）。由此卽得 $M_{min}{}^* \cap V_{-\sigma\lambda}{}^* = \mathbf{Z}f^+$。

現在令 M 爲 V 中任何的容許格子而且假定。它跟 V_λ 的交集恰好是 $\mathbf{Z}v^+$。前面的討論證明了 M 跟 $V_{\sigma\lambda}$ 的交集恰好是 $\mathbf{Z}w$，因此也得知 M^* 跟 $V_{-\sigma\lambda}{}^*$ 的交集恰好是 $\mathbf{Z}f^+$。所以當 M 在 V 中所指定的型式的容許格子中變動時，M^* 在 V^* 中類似的容許格子中變動，只是包含關係是相反的。這證明 M^* 有上界也同時有下界，所以對 M 來說也是一樣的。(對於 ad 來說，我們已用另一方式證明了這一件事，那就是只考慮的對偶格子而已。)

命題 令 $V = V(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda^+$，而且令 v^+ 是其極大向量。

(a) 每一容許格子如與 V_λ 在 $\mathbf{Z}v^+$ 中相交則必包含 $M_{min} =$

$\mathscr{U}_Z \cdot v^+$。

(b) 每一容許格子如與 V_λ 在 Zv^+ 中相交則必包含在 M_{max} 中，這是對偶於 V^* 中的 $(M^*)_{min}$ 的一個適當的容許格子。

27.4. 任意體上的討論

令 $\mathbf{F}_p$ 是特徵數 p 的質體，$\mathbf{K}$ 是 $\mathbf{F}_p$ 的擴張體。令 V 爲一信實 L 模；於是 V 的權衍生一個格子，它在 Λ_r 跟 Λ 之間，我們已記爲 $\Lambda(V)$。在 V 中選取一個容許格子 M，它在 L 中的穩定化子 $L_V = H_V + \coprod_{\alpha\in\Phi} \mathbf{Z}x_\alpha$, $H_V = \{h \in H \mid \lambda(h) \in \mathbf{Z} \ \forall \lambda \in \Lambda(V)\}$ (27.2)。

令 $V(K) = M \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{K}$, $L_V(\mathbf{K}) = L_V \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{K}$。因爲 L_V 跟 $End M$ 的一個子羣是同構（而且在括弧運算下是封閉的），$L_V(\mathbf{K})$ 可以跟 $gl(V(\mathbf{K}))(= End V(\mathbf{K}))$ 的一個子李代數認同。不僅如此，包含關係 $L(\mathbf{Z}) \longrightarrow L_V$ 引出一個李代數同態 $L(\mathbf{K}) \longrightarrow L_V(\mathbf{K})$，它在 $\coprod \mathbf{K}x_\alpha$ 上是一單射但在 $H(\mathbf{Z}) \otimes_Z \mathbf{K} = H(\mathbf{K})$ 中可以有非零的核。爲了瞭解這是如何發生的，我們回憶 (27.2) 中的 $sl(2, \mathbf{F})$ 的討論。如果 $p = 2$，則當 $V = L$（正則表現）時，$h \otimes 1 \in L(\mathbf{K})$被送至 $2\left(\frac{h}{2} \otimes 1\right) = 0 \in L_V(\mathbf{K})$。不僅如此，在 $L(\mathbf{K})$ 中的乘積跟在 $L_V(\mathbf{K})$ 的乘積是相異的：譬如，在前者中，$[hx] = 2x = 0$，然而在後者中，$\left[\frac{h}{2}\right]x = x \neq 0$。他方面，當 $p > 2$ 時。$L(\mathbf{K}) \longrightarrow L_V(\mathbf{K})$ 是一同構（對於任一權格子的選擇 $\Lambda(V) = \Lambda$ 或 Λ_r 都是一樣）：習題 5。

前面的討論證明了每一信實 L 模 V 在經由同態 $L(\mathbf{K}) \longrightarrow L_V(\mathbf{K})$ 引出一個 $L(\mathbf{K})$ 模 $V(\mathbf{K})$，它有時是非信實的（當 $L(\mathbf{K})$ 有一理想時，它一定是中心的，因此包含在 $H(\mathbf{K})$ 中）。必須強調的一件事是，（在不考慮記號下），這些都是決定於 V 中的容許格子 M 的選

擇。

在此有什麼是跟 (25.5) 中所建構的 Chevalley 羣 $G(\mathbf{K})$ 有類似之處呢？因爲M在自同態$\frac{x_\alpha{}^t}{t!}$ (卽$\frac{\phi(x_\alpha)^t}{t!}$, 如果$\phi$是所考慮的表現) 的作用下保持不變，$V(\mathbf{K})$ 在所對應的自同態的作用下保持不變。我們把這個自同態稱爲 $x_{\alpha,t}$ (其中$x_{\alpha,0}=1$)。注意，對於 $t<p$, $x_{\alpha,t}$的作用就像$\frac{(x_\alpha\otimes 1)^t}{t!}$的作用一樣，然而對於 $t\geq p$，這記號就沒有任何意義了。在任何情形下，對於足够大的 t, $x_{\alpha,t}=0$，所以我們可以記 $\theta_\alpha(1)=\sum_{t=0}^{\infty}x_{\alpha,t}\in End(V(\mathbf{K}))$。實際上，$\theta_\alpha(1)$ 的行列式值顯然是 1，所以它是屬於 $SL(V(\mathbf{K}))$。在更一般的情形下，我們能够定義 $V(\mathbf{K})$ 的自同構 $\theta_\alpha(c)$ 爲 $\sum_{t=0}^{\infty}\frac{(Tx_\alpha)^t}{t!}$ 並且取T的行列式值爲 $c\in\mathbf{K}$。由 $\theta_\alpha(c)(\alpha\in\Phi, c\in\mathbf{K})$ 的全體所生成的羣 $G_V(\mathbf{K})$稱爲一個$\Lambda(V)$型的 Chevalley 羣。如果 $\Lambda(V)=\Lambda_r$，就稱爲正則，如果 $\Lambda(V)=\Lambda$，就稱爲泛性。如前，$G_V(\mathbf{K})$ 事實上是跟M的選法相關。

27.5. 相關結果的縱覽

剛剛所描述的建構引出很多問題來，而這些問題還未全部解決。爲了讓讀者概略地知道那些是已知的，我們現在列下一些結果（不給證明）：

(1) 在自同構下，$G_V(\mathbf{K})$ 跟 $L_V(\mathbf{K})$ 只跟權格子有關，但跟 V 本身或 M 的選擇無擇無關。（然而M 確實對於 $G_V(\mathbf{K})$, $L_V(\mathbf{K})$ 在 $V(\mathbf{K})$ 上的作用有影響。）如 $\Lambda(V)\supset\Lambda(W)$，則存在自然同態 $G_V(\mathbf{K})\longrightarrow G_W(\mathbf{K})$, $L_W(\mathbf{K})\rightarrow L_V(\mathbf{K})$。特別，泛性型的 Chevalley 羣 ($\Lambda(V)=\Lambda$)「覆蓋」；其他的 Chevhalley 羣，同時，那些正則型的反被其他的 Chevalley 羣所覆蓋。

(2) 令 $V=V(\lambda)$, $\lambda\in\Lambda^+$, $M=M_{min}$。 則 $V(\mathbf{K})$ 是 $G_V(\mathbf{K})$ 的一個循環模，它是由一個向量 $v\otimes 1$，$v\in M\cap V_\lambda$，生成的。結果 $V(\mathbf{K})$ 有一唯一的極大 $G_V(\mathbf{K})$ 模，因此有一個唯一的既約同態像（屬「最高權」λ）。他方面，如果$M=M_{min}$，則 $V(\mathbf{K})$ 有一唯一的既約子模，它是屬「最高權」λ 的。

(3) 當 $\lambda\in\Lambda^+$ 滿足 $0\le\lambda(h_i)<p\,(1\le i\le l)$, $p=char\mathbf{K}$, 則在 (2) 中的主張對 $L_V(\mathbf{K})$（或 $L(\mathbf{K})$）也成立；結果所得的 p^l 個既約模是不等價的而且列盡既約「限制」的 $L(\mathbf{K})$ 模（的同構類）。

(4) $V(\mathbf{K})$ 的合成因子，如看成是 $G_V(\mathbf{K})$ 或 $L_V(\mathbf{K})$ 的模，是跟容許格子的選法無關。

習　題

1. 如果M是V中的一個容許格子，則對於V的每一權μ，$M\cap V_\mu$ 是 V_μ 中的一個格子。

2. 試證在L中的每一容許格子如包含 $L(\mathbf{Z})$ 而且在括弧運算下是封閉的話則必是 L_V 形式。〔試模仿命題 27.2 的證明；參考習題 21.5。〕

3. 如果M. N分別是V,W中的一個容許格子，則$M\otimes N$爲$V\otimes W$中的一個容許格子（參考引理 26.3A）。試利用這一事實以及 $V^*\otimes V$ 跟 $EndV$ 之間的認同 (6,1)，證明 L_V 在所有的 $(ad\,x_\alpha)^m/m!$ 的作用下保持不變（不用引理 27.2）。

在以下的習題中，$L=sl(2,\mathbf{F})$，而且權認同爲整數。

4. 令$V=V(\lambda)$, $\lambda\in\Lambda^+$。試證當λ是奇數時 $L_V=L(\mathbf{Z})$，然而當λ是偶數時 $L_V=\mathbf{Z}\left(\frac{h}{2}\right)+\mathbf{Z}x+\mathbf{Z}y$。

5. 如果 $char\mathbf{K}>2$，試證對任何 V, $L(\mathbf{K})\longrightarrow L_V(\mathbf{K})$ 是一個自同構。

6. 令$V=V(\lambda)$, $\lambda\in\Lambda^+$。試證當 $\Lambda(V)=\Lambda$ 時 $G_V(\mathbf{K})\cong SL(2,\mathbf{K})$，而當$\Lambda(V)=\Lambda_r$ 時 $G_V(\mathbf{K})\cong PSL(2,\mathbf{K})$。

7. 如果 $0\leq\lambda<char\mathbf{K}$, $V=V(\lambda)$，試證 $V(\mathbf{K})$ 是既約 $L(\mathbf{K})$ 模。

8. 固定$\lambda\in\Lambda^+$，令$V=V(\lambda)$。對V中的一個容許格子，固定一組$\mathbf{Z}$基底（$e_0,\cdots\cdots,e_\lambda$），它是由屬於權$\lambda-2i$的權向量 e_i 所組成（參考定理 27.1(a)）。（由於權空間是一維之故，所以在決定純量倍數下，e_i 是唯一決定的。）令 $x\cdot e_i=c_ie_{i-1}(c_0=1)$, $y\cdot e_i=d_ie_{i+1}$ $(d_i=1)$。試證(在取定符號下)兩整數列（$c_0,\cdots\cdots,c_\lambda$）跟（$d_\lambda,\cdots\cdots,d_0$）是可認同的，而在（在決定符號下）集合$\{c_1,\cdots\cdots,c_\lambda\}$跟$\{1,2,\cdots\cdots,\lambda\}$是一致的。最後，試證在 c_i, d_i 上所置的條件就已足够在V中定義一個容許格子。

附　　註

在這一節中的大部分材料是取自 Steinberg〔2〕，也可參考 Borel〔2〕。至於最近的工作可參考 Bteinberg〔1〕, Burgoyne, Williamson〔1〕, Humphreys〔1〕,〔2〕, Wong〔1〕。

索　　引

五 畫

六 畫

七 畫

八 畫

九　畫

十畫

十一畫

十二畫

十三畫

十 四 畫

十 五 畫

十 六 畫

十 七 畫

十 八 畫

十 九 畫

二 十 畫

二十一畫

其　他

符號索引

參考文獻

V. K. Agrawala, J. G. F. Belinfante, 〔1〕 Weight diagrams for Lie group representations: A computer implementation of Freudenthals' algorithm in ALGOL and FORTRAN, BIT 9, 301-314 (1969).

J. P. Antoine, D. Speiser, 〔1〕 Characters of irreducible representaions of the simple groups, I., J. *Mathematical Physics* 5, 1225-1234, II., Ibid., 1560-1572 (1964).

D. W. Barnes, 〔1〕 On Cartan subalgebras of Lie algebras, *Math. Z.* 101, 350-355 (1967).

R. E. Beck, B. Kolman, 〔1〕 A computer implementation of Freudenthl's multiplicity formula, *Indag. Math.*, to appear

I. N. Bernstein, I. M. Gel'fand, S. I. Gel'fand, 〔1〕 Structure of representations generated by vectors of highest weight, *Functional Anal Appl.* 5, 1-8 (1971).

〔2〕 Differential operators on principal affine spaces and investigation of g-modules, to appear.

A. Borel, 〔1〕 *Linear Algebratc Groups*, New York: W. A. Benjamin 1969.

〔2〕 Properties and linear reations of Chevalley groups, Seminar on Algebric Groups. and Related Finite Groups *Lecture Notes in Math.* 131, Berlin-Heidelberg-New

York: Springer-Verlag 1970.

N. Bourbaki, 〔1〕 *Groupes et algēbres de Lie*, Chap. 1, Paris: Hermann 1960.

〔2〕 *Groupes et algebres de Lie*, Chap. 4-6, Paris: Hermann 1968.

N. Burgoyne, 〔1〕 Modular representations of some finite groups, Representation Theory of Finite Groups and Related Topics, *Proc. Symp. Pure Math. XXI* Providence Amer. Math. Soc. 1971.

N. Burgoyne, C. Williamson 〔1〕 Some computaions involving simple Lie algebras, *Proc. 2nd Symp. Symbolic & Alg. Manipulation*, ed. S. R. Petrick, New York: Assn. Computing Machinery 1971.

R. W. Carter, 〔1〕 Simple groups and simple Lie algebras, *J. London Maht. Soc.* 40, 193-240 (1965).

P. Cartier, 〔1〕 On H. Weyl's character formula, *Bull. Amer. Math. Soc.* 67, 228-230 (1961).

C. Chevalley, 〔1〕 *Theorie des Groupes de Lie, Tome II*, Paris: Hermann 1951.

〔2〕 *Theorie des Groupes de Lie, Tome III*, Paris: Hermann 1955.

〔3〕 Sur certains groupes simples, *Tohoku Math. J.* (2) 7, 14-66(1955).

〔4〕 *Certain schémas de groupes semi-simples, Sém. Bourbaki* 1960-61, *Exp.* 219, New York: W. A. Benjamin 1966.

C. W. Curts, [1] Chevalley groups and related topics, *Finite Simple Groups*, ed., M. B. Powell, G. Higman, London-New York: Academic Press 1971.

H. Freudenthal, [1] Zur Berechnung der Charaktere der halbeinfachen Lieschen Gruppen, I., *Indag. Math.* 16, 369-376(1954); II., Ibid 487-491; III, Ibid 13, 511-514 (1956).

H. Freudenthal, H. de Vries, [1] *Linear Lie Growps*, London-New York: Academic Press 1969.

Harish-Chandra, [1] Some applications of the universal enveloping algebra of a semisimple Lie agebra, *Trans. Amer. Math. Soc.* 70, 28-99 (1951).

J. E. Humphreys [1] Modular representations of classical Lie algebras and semisimple groups, *J. Algebra* 19, 51-79 (1971).

[2] Projective modules for *SL* (2, *q*), *J. Algebra*, to appear.

N. Jaoobson, [1] *Lie Algebras*, New York-London: Wiley Interscience 1962.

[2] *Exceptional Lie Algebras*, New York: Marcel Dekker 1971.

I. Kaplansky, [1] *Lie Algebras and Locally Compact Groups*, Chicago-London: U. Chicago Press 1971.

A. U. Klimyk, [1] Decomposition of a tensor product of irreducible represntations of a semisimple Lie algebra into a direct sum of itreducible representantions, *Amer. Math.*

Soc. Tronslations, Series 2, vol. 76, Providence: Amer. Math. Soc. 1968.

B. Kolman, J. G. F. Belinfante, [1] *A Survey of Lie Groups and Lie Algebras with Compntational Methods and Applicatons*, Philadelphia: SLAM 1972.

B. Kostant, [1] A formula for the multiplicity of a weight, *Trans. Amer Math Soc.* 93. 53-73 (1959).

[2] Groups over Z, Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups, *Proc. Symp. Pure Math.* IX, Providence: Amer. Math. Soc. 1966.

M. J. Krusemeyer, [1] Determining multiplicities of dominant weights in irreducible Lie algebra representations using a computer, *BIT* 11, 310-316(1971).

F. W. Lemire, [1] Existence of weight space decompositions for irreducible representations of simple Lie algebras, *Canad. Math. Bull.* 14, 113-115(1971).

R. D. Pollack, [1] Introduction to Lie Algebras, notes by G. Edwards, Queen's Papers in Pure and Applied Math., No. 23, Kingston, Ont: Queen's University 1969.

H. Samelson, [1] *Notes on Lie Algebras*, Van Nostrand Reinhold Mathematical Studies No. 23, New York: Van Nostrand Reinhold 1969.

R. D. Schafer, [1] *An Introduction to Nonassociative Algebras*, New York-London: Academic Press 1966.

G. B. Seligman, [1] *Modular Lie Algebras*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, Band 40,

Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag 1967.

[2] Topics in Lie algebras, mimeographed lecture notes, New Haven, Conn.: Yale Univ. Math. Dept. 1969.

Séminaire "Sophus Lie", [1] *Theorie des algêbres de Lie. Toplogie des groupes de Lie*, Paris: École Norm. Sup. 1954-55.

J-P Serre, [1] *Lie Algebras and Lie Groups*, New York: W. A. Benjamin 1965.

[2] *Algēbres de Lie semi-simples complexes*, New York: W. A. Benjamin 1966.

T. A. Springer, [1] Weyl's character formula for algebraic groups, *Invent. Math.* 5, 85-105

R. Steinberg, [1] A general Clebsch-Gordan theorem, *Bull. Amer. Math. Soc.* 67, 406-407 (1961). [2] Lectures on Chevalley groups, mimeographed lecture notes, New Haven, Conn.: Yale Univ. Math. Math. 1968.

J. Tits, Sur les constantes de structure et le théorème d'existence des algèbres de Lie semi-simples, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Matth. No.* 31, 21-58(1966).

V. S. Varadarjan, [1] Lie Groups, mimeographed lecture notes, Los Angeles: U. C. L. A. Math. Dept. 1967.

D-N. Verma, [1] Structure of certain induced representions of complex semple Lie algebras, Yale Univ., dissertation, 1966; cf. *Bull Amer. Moth. Soc.* 74, 160-166(1968).

[2] Mōbius inversion for the Bruhat ordering on a Weyl group, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* 4e *série*, t. 4,

393-398(1971).

D. J. Winter, 〔1〕 *Abstract Lie Algebras.* Cambridge, Mass.: M. I. T. Press 1972.

W. J. Wong, 〔1〕 Irreducible modular representations of finite Chevalley groups, 20, 355-367(1972).

[General Information]
书名=李代数与表现理论之导引
作者=J.E.Humphrey著
页数=261
SS号=12132262
DX号=
出版日期=1981.8
出版社=黎明文化事业股份有限公司